

***Manual
de
Matemática
Financiera:***

Texto, Problemas y Casos

Carlos Aliaga Valdez



UNIVERSIDAD DEL PACIFICO

**LIMA-PERÚ
1994**

© Universidad del Pacífico
Centro de Investigación
Avenida Salaverry 2020
Lima 11, Perú



41200

**MANUAL DE MATEMÁTICA FINANCIERA:
TEXTO. PROBLEMAS Y CASOS**

Carlos Aliaga Valdez

2a. Edición: agosto 1995

Diseño de la caratula: M & B Creativos

BUP - CENDI

Aliaga Valdez, Carlos

Manual de matemática financiera: texto, problemas y casos. --
Lima : Universidad del Pacífico, 1995. 2a. ed.-- (Apuntes de
Estudio ; 18)

/MATEMÁTICAS FINANCIERAS/

51:332 (CDU)

Miembro de la Asociación Peruana de Editoriales Universitarias y de Escuelas Superiores (APESU) y miembro de la Asociación de Editoriales Universitarias de América Latina y del Caribe (EULAC).

El Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico no se solidariza necesariamente con el contenido de los trabajos que publica.

Derechos reservados conforma a Ley.

Índice

Prefacio	19
I. Nociones fundamentales	21
1. Precedencia de las operaciones	21
2. Potenciación	23
3. Radicación	24
4. Teoría de exponentes	25
4.1 Multiplicación de potencias de igual base	25
4.2 División de potencias de igual base	26
4.3 Multiplicación de potencias de igual exponente	27
4.4 División de potencias de igual exponente	27
4.5 Potencia de potencia	28
4.6 Potencia de un producto	28
4.7 Potencia de un cociente	29
4.8 Exponente uno, cero, negativo y fraccionario	29
4.8.1 Exponente uno	30
4.8.2 Exponente cero	31
4.8.3 Exponente negativo	32
4.8.4 Exponente fraccionario	34
4.9 Leyes de la radicación	37
4.10 Ejercicios resueltos	38
4.11 Ejercicios propuestos	39

5.	Logaritmos	41
5.1	Antilogaritmos	42
5.2	Ejercicios resueltos	43
5.3	Ejercicios propuestos	47
5.4	Propiedades fundamentales de los logaritmos	47
5.5	Ejercicios resueltos	52
5.6	Ejercicios propuestos	54
6.	Variable y constante	54
7.	Ecuaciones	55
7.1	Transposición de términos	55
7.1.1	Reglas	56
7.2	Expresión recíproca	57
7.3	Sistema de ecuaciones de primer grado simultáneas	59
7.3.1	Método de reducción de una incógnita	60
7.4	Ecuación cuadrática	61
7.5	Ecuación bicuadrada	62
8.	Progresiones	63
8.1	Progresión aritmética	63
8.1.1	Enésimo término de una P.A.	64
8.1.2	Suma de los n primeros términos	64
8.1.3	Problemas resueltos	65
8.2	Progresión geométrica	67
8.2.1	Enésimo término	68
8.2.2	Suma de los n primeros términos	68
8.2.3	Límite de la suma de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos	69
8.2.4	Problemas resueltos	69
9.	Interpolación	73
9.1	Interpolación lineal	74
9.2	Método del promedio o de la semisuma	79
9.3	Interpolación lineal a través de proporciones	79
10.	Diagramas de tiempo-valor y de flujo de caja	80
11.	Operación de calculadora	84
12.	Listado de fórmulas	87
13.	Problemas propuestos	88
14.	Resumen del capítulo	89

II. Interés simple 90

Introducción	90
--------------------	----

1.	Cálculo del interés simple	91
1.1	Período de tiempo comprendido entre dos fechas	93
1.2	Año bancario según BCRP	94
1.3	Inclusión y exclusión de días cuando se producen variaciones de tasas	96
1.4	Variaciones en la tasa de interés	98
1.5	Variaciones en el principal (numerales)	99
1.6	Numerales con variaciones de tasas	102
2.	Monto, capital o stock final, valor futuro	103
2.1	Monto con variaciones de tasa	105
3.	Principal, capital inicial, valor presente	105
4.	Ecuaciones de valor equivalente a interés simple	106
5.	Problemas resueltos	109
6.	Listado de fórmulas	119
7.	Problemas propuestos	120
8.	Resumen del capítulo	127

III. Interés compuesto 128

Introducción	128
1. Cálculo del monto	130
1.1 El factor simple de capitalización	130
1.2 El FSC con n no entero	132
1.3 Tasa nominal y tasa efectiva	134
1.4 El FSC con variaciones en la tasa de interés	135
1.5 Capitalización calendaria	136
2. Cálculo del capital inicial	137
2.1 El factor simple de actualización	137
2.2 FSA con variaciones en la tasa de interés	138
3. Cálculo de la tasa de interés	140
4. Cálculo del número de períodos de capitalización	141
5. Cálculo del interés	141
5.1 Interés devengado en cualquier período capitalizable	143
6. Ecuaciones de valor equivalente a interés compuesto	145
6.1 Refinanciación de deudas sustituyéndolas por una sola	147
6.2 Diferimiento de pagos	148
6.3 Consolidación de pasivos	149
6.4 Cuotas de amortización de préstamos	150

6.5	Amortizaciones parciales de préstamos	150
6.6	Ventas a plazos (sistema de créditos)	151
6.7	Cálculo de la tasa de interés implícita cobrada en financiamientos	153
6.8	Evaluaciones a valor presente	153
6.9	Cálculo del vencimiento común	154
7.	Listado de fórmulas	155
8.	Problemas propuestos	156
9.	Resumen del capítulo	168

IV. Descuento 169

Introducción	169
1. Descuento racional, matemático o verdadero	170
1.1 Descuento racional simple	170
1.1.1 Equivalencia del descuento racional simple y el interés simple	171
1.2 Descuento racional compuesto	173
1.2.1 Equivalencia del descuento racional compuesto y el interés compuesto	173
1.2.2 Descuento racional compuesto D_k devengado en cada período de descuento	177
2. Descuento bancario	178
2.1 Descuento bancario simple	179
2.1.1 Cálculo del valor líquido	180
2.1.2 Cálculo del valor nominal	181
2.2 Descuento bancario compuesto	182
2.2.1 Cálculo del valor líquido	182
2.2.2 Cálculo del valor nominal	184
2.2.3 Cálculo del descuento bancario compuesto	184
2.2.4 Descuento bancario compuesto D_k devengado en cada período de descuento	185
3. Consideraciones entre la tasa "i" y la tasa "d"	186
4. Descuento comercial	187
4.1 Descuento comercial unitario	188
4.2 Descuento comercial sucesivo	188
5. Listado de fórmulas	191
6. Problemas propuestos	193
7. Resumen del capítulo	198

V. Tasas utilizadas en el sistema financiero 199

Introducción	199
1. Tasa activa	203
2. Tasa pasiva	204
3. Tasa nominal y tasa proporcional	205
4. Tasa efectiva	206
5. Tasas equivalentes	209
5.1 Tasa equivalente partiendo de una tasa efectiva dada	209
5.2 Tasa nominal equivalente a una tasa efectiva dada	212
5.3 Tasa de interés simple equivalente a una tasa de interés compuesto para un mismo horizonte temporal	214
6. Tasa vencida	215
7. Tasa adelantada	215
7.1 Tasa adelantada equivalente a una tasa vencida	215
7.2 Tasa vencida (i) equivalente a una tasa adelantada (d)	216
7.3 Factores de descuento	217
8. Tasa de interés convencional compensatorio	220
9. Tasa de interés moratorio	220
10. Tasa de interés total en mora (ITM)	221
11. TAMN, TAMEX, TIPMN, TIPMEX	222
11.1 Tasa efectiva en soles de depósitos en moneda extranjera (dólares)	223
12. Tasa de inflación	225
12.1 Cálculo de la tasa acumulada de inflación cuando se conocen las variaciones mensuales	226
12.2 Cálculo de la tasa de inflación cuando se conocen los números índices	227
13. Tasa real	229
14. Tasa de interés ajustada por inflación	232
15. Tasa discreta y continua	233
16. Tasas explícita e implícita	234
17. Tasa de interés legal	234
18. Listado de fórmulas	235

19. Problemas propuestos	237
20. Resumen del capítulo	248
VI. Anualidades vencidas	250
Introducción	250
1. Anualidades y rentas ciertas vencidas	253
2. Monto de una anualidad simple	253
3. Valor presente de una anualidad simple	256
4. Cálculo del valor de las rentas en las anualidades simples	258
4.1 Renta conociendo el valor futuro	258
4.2 Renta conociendo el valor presente	259
5. Cálculo de n en una anualidad	261
5.1 Cálculo de n en función al FCS o FDFA	261
5.2 Cálculo de n en función al FRC o FAS	262
6. Cálculo de la tasa de interés implícita de una anualidad ..	264
7. Factores financieros	264
7.1 Relaciones entre los factores financieros	266
8. Problemas resueltos	267
9. Listado de fórmulas	277
10. Problemas propuestos	278
11. Resumen del capítulo	284
VII. Anualidades anticipadas	286
Introducción	286
1. Monto de una anualidad simple anticipada	288
2. Valor presente de una anualidad simple anticipada	289
3. Cálculo del valor de las rentas o imposiciones en las anualidades simples anticipadas	290
3.1 Renta o imposición conociendo el valor futuro	290
3.2 Renta o imposición conociendo el valor presente ...	291
4. Cálculo n en una anualidad anticipada	293
4.1 Obtención de n a partir del FCS o FDFA	293
4.2 Obtención de n a partir del FRC o FAS	293
5. Cálculo de la tasa de interés de una anualidad anticipada ..	295
6. Listado de fórmulas	296
7. Problemas propuestos	297
8. Resumen del capítulo	301

VIII. Anualidades diferidas 302

Introducción	302
1. Monto de las anualidades simples diferidas: vencida y anticipada	303
2. Valor presente de una anualidad simple diferida vencida . .	303
3. Valor presente de una anualidad simple diferida anticipada	305
4. Cálculo del valor de las rentas en las anualidades diferidas simples: vencidas y anticipadas	306
5. Cálculo de n e i en una anualidad diferida	308
6. Problemas resueltos	308
7. Listado de fórmulas	311
8. Problemas propuestos	312
9. Resumen del capítulo	315

IX. Rentas perpetuas 316

Introducción	316
1. Monto de una perpetuidad	316
2. Cálculo del valor de las rentas en una perpetuidad simple .	317
2.1 Renta perpetua vencida	318
2.2 Renta perpetua anticipada	318
3. Valor presente de una perpetuidad vencida y anticipada . .	319
3.1 Valor presente de una perpetuidad vencida	319
3.2 Valor presente de una perpetuidad anticipada	320
3.3 Valor presente de una perpetuidad anticipada cuya renta inicial es diferente a las demás rentas	321
4. Valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida y anticipada	322
4.1 Valor presente de una perpetuidad diferida vencida .	322
4.2 Valor presente de una perpetuidad diferida anticipada .	323
5. Capitalización	324
6. Valor presente de una perpetuidad a pagar al final de cada cierto número de períodos de capitalización	325
7. Costo capitalizado	327
7.1 Costo capitalizado cuando F es igual a W	329
8. Costos equivalentes	331
9. Listado de fórmulas	332

10. Problemas propuestos	334
11. Resumen del capítulo	339

X. Anualidades generales 340

Introducción	340
1. El FDFA como factor de distribución de rentas vencidas ..	341
2. El FCS como factor de agrupamiento de rentas vencidas ..	344
3. Monto de una anualidad general	347
4. Valor presente de una anualidad general	348
5. Renta de una anualidad general	349
6. Tiempo y tasa de una anualidad general	350
7. Problemas propuestos	350
8. Resumen del capítulo	353

XI. Factores múltiples 354

Introducción	354
1. Anualidades y flujos distribuidos aleatoriamente	355
2. Anualidad equivalente de flujos uniformes y únicos	357
3. Cambios de tasas en anualidades	358
4. Conversión de anualidades variables a anualidades simples	359
5. Problemas propuestos	360
6. Resumen del capítulo	364

XII. Gradientes 365

Introducción	365
1. Anualidades con rentas en progresión aritmética	366
1.1 Valor presente de una anualidad de los gradientes ..	367
1.1.1 Factor de actualización de una anualidad de los gradientes	369
1.2 Anualidad con rentas uniformes equivalente a una anualidad de los gradientes	369
1.2.1 FRC de una anualidad de los gradientes	370
1.3 Gradientes desfasados	372
1.3.1 Valor presente de una anualidad de gradientes desfasados	373
1.4 Gradientes negativos	375
2. Anualidades con rentas en progresión geométrica	376

2.1	Valor presente de una anualidad cuyas rentas crecen geoméricamente	376
3.	Listado de fórmulas	378
4.	Problemas propuestos	379
5.	Resumen del capítulo	383

XIII. Fondos de amortización 384

	Introducción	384
1.	Fondos de amortización	385
2.	Fondos de amortización donde la incógnita es n	387
3.	Pago necesario para acumular el fondo de amortización cuando n no es entero	391
4.	Fondos de amortización donde la incógnita es la tasa de interés	393
5.	Cuadro del fondo de amortización	394
6.	Cálculo del fondo de amortización en una fecha dada	395
7.	Fondos de amortización con variaciones en la tasa de interés	395
8.	Listado de fórmulas	397
9.	Problemas propuestos	397
10.	Resumen del capítulo	399

XIV. Amortización 400

	Introducción	400
1.	Tabla de reembolso de préstamos o servicio de la deuda	401
2.	Sistemas de repago de préstamos	403
3.	Cuotas constantes vencidas	404
3.1	Cálculo de la cuota constante cuando el préstamo se desembolsa en partes	407
3.2	Cálculo de la cuota constante cuando existen variaciones de tasa	410
3.3	Pagos en fechas anteriores al vencimiento de la cuota fija	412
3.4	Pagos cuyos importes son mayores a la cuota fija	414
3.5	Cálculo de la cuota capital en cualquier cuota constante	415
3.5.1	Cuota capital en función de la cuota constante	415
3.5.2	Cuota capital en función del préstamo	418

3.5.3	Cuota capital en función de la primera cuota capital	419
3.6	Cálculo de la cuota interés en cualquier cuota constante	419
3.6.1	Cuota interés en función de la cuota constante	420
3.6.2	Cuota interés en función del préstamo	420
3.7	Cálculo de la deuda extinguida en cualquier cuota ..	421
3.7.1	Deuda extinguida en función de A_1	421
3.7.2	Deuda extinguida en función de R	422
3.7.3	Deuda extinguida en función P	422
3.8	Cálculo de la deuda residual en cualquier fecha	423
3.8.1	Deuda residual en función de R	423
3.8.2	Deuda residual en función de P	424
3.9	Cálculo para hallar n	425
3.10	Importe de la última renta cuando n es no entero ...	426
3.11	Cálculo para hallar la tasa de interés	430
4.	Cuotas constantes en períodos variables	431
5.	Cuotas constantes anticipadas	433
6.	Cuotas constantes diferidas	434
7.	Amortizaciones constantes	435
8.	Interés constante	437
9.	Cuotas crecientes aritméticamente	439
9.1	Cálculo del gradiente constante	440
9.2	Cálculo de G en una anualidad variable	441
10.	Cuotas crecientes geométricamente	443
11.	Cuotas con amortizaciones crecientes periódicamente	444
12.	Suma de números dígitos	446
13.	Sistema de reajuste de deuda	447
14.	Listado de fórmulas	449
15.	Problemas propuestos	451
16.	Resumen del capítulo	463

XV. Depreciación 466

Introducción	466
1. Método uniforme o de línea recta	468
1.1 Depreciación	468
1.2 Fondo de reserva o depreciación acumulada	469
1.3 Valor contable	470

2.	Método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros (saldo decreciente)	470
2.1	Valor contable	471
2.2	Depreciación	471
2.3	Fondo de reserva	472
3.	Apreciaciones al método de línea recta y al método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros	474
4.	Método del doble saldo decreciente	474
4.1	Valor contable	475
4.2	Depreciación	475
5.	Método del fondo de amortización	476
5.1	Depreciación	476
6.	Método del interés sobre la inversión	477
7.	Método de unidades producidas	480
8.	Método de suma de números dígitos	481
9.	Listado de fórmulas	482
10.	Problemas propuestos	484
11.	Resumen del capítulo	486
Casos		489
Siglas		501
Bibliografía		508

Prefacio

El presente libro es una herramienta necesaria para la solución de problemas en la gestión financiera de empresas y ha sido concebido para que sea utilizado como material de consulta por estudiantes, profesionales, empresarios, etc. que tengan necesidad de efectuar cálculos financieros con el objeto de tomar una decisión de inversión o financiamiento. Para su comprensión no es necesario el dominio de matemáticas avanzadas. Sin embargo, en el Capítulo I se desarrollan los conocimientos matemáticos fundamentales que se aplican en los demás capítulos del libro.

La resolución de operaciones, problemas y casos se verán ampliamente facilitados si se dispone y domina el uso de una calculadora científica o financiera; motivo por el cual, prescindimos del uso tradicional de tablas financieras para obtener los valores de factores financieros a diversas tasas y tiempos.

El desarrollo de los capítulos tiene un nivel de complejidad creciente y la comprensión de uno facilitará la comprensión del siguiente. Cada capítulo tiene una introducción donde se presentan, de modo general, sus objetivos y temas a tratar; el desarrollo de la parte teórica; ejemplos y problemas de aplicación práctica resueltos; un listado de fórmulas; problemas propuestos con el objeto de que el lector verifique su nivel de aprendizaje; y, por último, un resumen de todo lo tratado.

La parte central del libro descansa en el Capítulo V (sobre tasas). Es necesario distinguir las diferencias entre una tasa nominal, efectiva, proporcional, equivalente, vencida y anticipada, por lo que se recomienda resolver, de ser posible, la totalidad de los problemas propuestos. La tasa equivalente permite desarrollar muy fácilmente los capítulos de anualidades donde intervienen rentas, períodos de pago y períodos de capitalización. Cuando no coincide el período de renta con la tasa, se convierte la tasa proporcionada al período de renta, transformando una anualidad general en una anualidad simple. De este modo se evitan desarrollar fórmulas especiales para estos casos.

Dedico esta obra a mi esposa, y a mis hijos que son la fuente y el motivo de la realización de este trabajo y de otros proyectos emprendidos. Agradezco la colaboración permanente de mi hijo Carlos, quien ha trabajado con gran esfuerzo el Capítulo I y con quien frecuentemente hemos discutido frente a nuestra computadora muchos de los temas que presentamos.

Nociones fundamentales*

1. Precedencia de las operaciones

Desarrolle mentalmente la siguiente expresión:

$$3 + 5 \times 2 - 8 \div 4$$

Realizando la operación de izquierda a derecha, se obtiene como resultado 2. Operando una calculadora que respete la convención respecto a la precedencia de las operaciones obtendrá como resultado 11. Su desarrollo es el siguiente:

$$\begin{aligned} & 3 + 5 \times 2 - 8 \div 4 \\ & 3 + \underbrace{5 \times 2}_{10} - \underbrace{8 \div 4}_2 \\ & = 3 + 10 - 2 \\ & = 11 \end{aligned}$$

En las operaciones matemático-financieras, donde intervengan potenciaciones, radicaciones, multiplicaciones, divisiones, adiciones y sustracciones, y no se use signos de agrupación, se *acepta convencionalmente* que debe realizarse de acuerdo al siguiente orden:

* Este capítulo fue tomado del libro *Introducción a la matemática financiera* de Carlos R. Aliaga Calderón.

- Primero : potenciaciones y radicaciones
- Luego : multiplicaciones y divisiones
- Por último: adiciones y sustracciones

Cuando operaciones de la misma prioridad se encuentren en serie, se deben ejecutar de izquierda a derecha.

Ejemplo.- Desarrolle la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 & 3 + 5 \times 2 - 4 + 2 + 3^2 + \sqrt{16} \\
 &= 3 + 5 \times 2 - 4 + 2 + \underbrace{3^2}_{9} + \underbrace{\sqrt{16}}_{4} \\
 &= 3 + \underbrace{5 \times 2}_{10} - \underbrace{4 + 2}_{2} + 9 + 4 \\
 &= 3 + 10 - 2 + 9 + 4 \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

En el caso que la expresión de una fórmula demande alterar la precedencia de las operaciones, pueden usarse los siguientes signos de agrupación

- Paréntesis : ()
- Corchetes : []
- Llaves : { }

Ejemplos

1. La suma de 3 y 5, multiplicado por la diferencia de 2 y 4, dividido por el cuadrado de la suma de dos y tres, y todo ello más la raíz cuadrada de 16, se expresa de la manera siguiente:

$$(3 + 5) \times (2 - 4) \div (2 + 3)^2 + \sqrt{16}$$

Y se obtiene como resultado 3,36

2. Desarrollar $S = 1\,000 \left(1 + 0,04 \times \frac{4}{12} \right)$

$$S = 1000 \left(1 + 0,04 \times \frac{4}{12} \right)$$

$$S = 1000 (1 + 0,04 \times 0,3333)$$

$$S = 1000 (1 + 0,01333)$$

$$S = 1000 (1,01333)$$

$$S = 1013,33$$

Hemos reemplazado $\frac{4}{12}$ por su equivalente 0,3333. Procedemos luego a desarrollar la expresión entre paréntesis. Al interior del paréntesis se desarrollan las operaciones respetando la precedencia convenida. Luego 1 000 se multiplica por el resultado de la operación entre paréntesis.

Ejercicios

Resuelva operando su calculadora:

$$1. \quad \frac{0,05 (1 + 0,05)^4}{(1 + 0,05)^4 - 1}$$

Respuesta: 0,28201183

$$2. \quad 100 \left[\frac{1}{0,04} - \frac{12}{(1 + 0,04)^{12}} \right]$$

Respuesta: 1750,48

$$3. \quad \frac{23 \left(\frac{0,08}{1 - 0,08} \right)}{103 [(1 + 0,04)^2 - 1]}$$

Respuesta: 0,23795926

En una expresión del siguiente tipo $\sqrt{4 + 2}$, la barra superior del signo de radicación está actuando también como signo de agrupación. Resulta claro que se debe realizar primero la adición, y luego la radicación de la suma.

2. Potenciación

Cuando en una multiplicación, los n factores que intervienen son iguales a un número b , el resultado obtenido es la n -ésima potencia de b . La operación se

$$S = 1000 \left(1 + 0,04 \times \frac{4}{12} \right)$$

$$S = 1000 (1 + 0,04 \times 0,3333)$$

$$S = 1000 (1 + 0,01333)$$

$$S = 1000 (1,01333)$$

$$S = 1013,33$$

Hemos reemplazado $\frac{4}{12}$ por su equivalente 0,3333. Procedemos luego a desarrollar la expresión entre paréntesis. Al interior del paréntesis se desarrollan las operaciones respetando la precedencia convenida. Luego 1 000 se multiplica por el resultado de la operación entre paréntesis.

Ejercicios

Resuelva operando su calculadora:

1. $\frac{0,05 (1 + 0,05)^4}{(1 + 0,05)^4 - 1}$ Respuesta: 0,28201183

2. $100 \left[\frac{1}{0,04} - \frac{12}{(1 + 0,04)^{12}} \right]$ Respuesta: 1750,48

3. $\frac{23 \left(\frac{0,08}{1 - 0,08} \right)}{103 [(1 + 0,04)^2 - 1]}$ Respuesta: 0,23795926

En una expresión del siguiente tipo $\sqrt{4 + 2}$, la barra superior del signo de radicación está actuando también como signo de agrupación. Resulta claro que se debe realizar primero la adición, y luego la radicación de la suma.

2. Potenciación

Cuando en una multiplicación, los n factores que intervienen son iguales a un número b , el resultado obtenido es la n -ésima potencia de b . La operación se

llama *potenciación*, b *base* y n *exponente*. La operación se representa se representa b^n .

$$\underbrace{b.b.b.\dots\dots b.b.b}_{n \text{ factores}} = (b^n)$$

\rightarrow exponente
 \rightarrow n-ésima potencia de b
 \rightarrow base

El último miembro de la igualdad anterior se lee "b elevado a la n".

La introducción de la potenciación tiene sentido debido a que facilita la obtención y representación de fórmulas. Además, en las calculadoras podemos ingresar la base y el exponente, obteniendo los resultados más rápidamente y con menos probabilidad de error, que si hubiéramos utilizado directamente la operación de multiplicación .

El uso de la potenciación simplifica los cálculos a interés compuesto. Por ejemplo, para veinte factores de capitalización iguales a 1,1, no tendremos que ingresar en la calculadora:

$$1,1 \times 1,1 \times 1,1 \times 1,1 \times 1,1 \dots \dots \text{(veinte factores)}$$

Digite 1,1 y elévelo a la 20. Obtendrá como resultado 6,72749995 o una cifra aproximada.

Ejemplos

1. $(1 + 0,05) (1 + 0,05) (1 + 0,05) = (1 + 0,05)^3$
2. $(1 + i) (1 + i) (1 + i) (1 + i) (1 + i) = (1 + i)^5$
3. $(1 + h) (1 + h) (1 + h) (1 + h) = (1 + h)^4$

3. Radicación

Dados un exponente n y una potencia P , si existe una base b de tal forma que $b^n = P$, entonces a b se le llama *raíz n-ésima de P*. La operación de calcular una raíz se llama *radicación* y se representa $\sqrt[n]{P}$.

$$\text{Si } b^n = P \rightarrow b = \sqrt[n]{P}$$

El último miembro de la igualdad anterior se lee "raíz n -ésima de P ".

$$\begin{array}{c}
 \text{Signo radical} \\
 \uparrow \\
 \text{Índice de la raíz} \leftarrow \sqrt[n]{P} = b \rightarrow \text{raíz } n\text{-ésima de } P \\
 \downarrow \\
 \text{Cantidad subradical}
 \end{array}$$

Convenciones

- En el caso que un número tenga una raíz real positiva y otra negativa, se acepta convencionalmente que el símbolo $\sqrt[n]{P}$ hace referencia a la raíz n -ésima positiva de P . Para hacer referencia a la raíz negativa se escribirá $-\sqrt[n]{P}$.
- Para referirse a $\sqrt[2]{P}$ se puede escribir \sqrt{P} . Es decir, si no se especifica el índice de la raíz se sobreentiende que es 2.

4. Teoría de exponentes

Desde el punto 4.1 hasta el punto 4.7 asumiremos que m y n son enteros positivos mayores que 1.

4.1 Multiplicación de potencias de igual base

Si deseamos multiplicar a^2 por a^4 tenemos:

$$a^2 \cdot a^4 = (a \cdot a) (a \cdot a \cdot a \cdot a)$$

$$a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$$

Generalizando:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

El producto de potencias de una misma base es igual a la base común elevada a la suma de los exponentes.

Ejemplos

1. $(1+i)^4 (1+i)^3 = (1+i)^{4+3} = (1+i)^7$
2. $(1+f)^3 (1+f)^4 (1+f)^2 = (1+f)^{3+4+2} = (1+f)^9$
3. $(1+0,03)^3 (1+0,03)^5 = (1+0,03)^{3+5} = (1+0,03)^8$

4.2 División de potencias de igual base

En la expresión $a^2 : a^4 = a^6$

$$a^2 = \frac{a^6}{a^4}$$

$$a^2 = a^{6-4}$$

Generalizando:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a \neq 0, (m - n) > 1$$

En la división de potencias de igual base, el cociente es otra potencia con la misma base y exponente igual a la diferencia de los exponentes del dividendo y divisor.

Ejemplos

1. $\frac{(1+i)^6}{(1+i)^4} = (1+i)^{6-4} = (1+i)^2$
2. $\frac{[(1+i)(1+r)]^5}{[(1+i)(1+r)]^3} = [(1+i)(1+r)]^{5-3} = [(1+i)(1+r)]^2$
3. $\frac{1,07^6}{1,07^2} = 1,07^{6-2} = 1,07^4$

4.3 Multiplicación de potencias de igual exponente

Si necesitamos multiplicar $a^2 \cdot b^2$ tenemos:

$$a^2 \cdot b^2 = (a \cdot a) (b \cdot b) = (ab) (ab) = (ab)^2$$

Generalizando:

$$a^m b^m = (ab)^m$$

Ejemplos

1. $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$
2. $(1+i)^6 (1+r)^6 = [(1+i)(1+r)]^6$
3. $(1+i_1)^2 (1+i_2)^2 (1+i_3)^2 = [(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)]^2$

4.4 División de potencias de igual exponente

La expresión $\frac{3^3}{2^3}$ es igual a

$$\frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

Generalizando:

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$b \neq 0$

Ejemplos

1. $\frac{(1+i)^6}{(1+r)^6} = \left(\frac{1+i}{1+r}\right)^6$
2. $\frac{[(1+i)(1+r)]^5}{[(1+m)(1+n)]^5} = \left[\frac{(1+i)(1+r)}{(1+m)(1+n)}\right]^5$

$$3. \quad \frac{1,07^6}{1,05^6} = \left(\frac{1,07}{1,05} \right)^6$$

4.5 Potencia de potencia

Sabemos que:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6 = a^{2 \cdot 3}$$

$$(b^4)^5 = b^4 \cdot b^4 \cdot b^4 \cdot b^4 \cdot b^4 = b^{20} = b^{4 \cdot 5}$$

Generalizando:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

La potencia de una potencia de base **a**, es igual al número **a** elevado al producto de los exponentes de las potencias.

Ejemplos

$$1. \quad (8^2)^3 = 8^{2 \cdot 3} = 8^6$$

$$2. \quad \{[(1+r)^3]^2\}^4 = (1+r)^{3 \cdot 2 \cdot 4} = (1+r)^{24}$$

$$3. \quad [(1+TEM)^2]^6 = (1+TEM)^{2 \cdot 6} = (1+TEM)^{12}$$

4.6 Potencia de un producto

Una expresión como $(ab)^3$, puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (a \cdot a \cdot a) (b \cdot b \cdot b) = a^3 b^3$$

Generalizando:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

La n-ésima potencia de un producto es equivalente al producto de las n-ésimas potencias de cada factor.

Ejemplos

1. $(8.5)^2 = 8^2 .5^2$
2. $(abc)^4 = a^4 b^4 c^4$
3. $[(1+i)^2 (1+r)^3]^4 = [(1+i)^2]^4 [(1+r)^3]^4 = (1+i)^8 (1+r)^{12}$

4.7 Potencia de un cociente

La expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a.a.a}{b.b.b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Generalizando:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Ejemplos

1. $(8 \div 3)^2 = 8^2 / 3^2$
2. $(a \div b)^5 = a^5 / b^5$
3. $\left[\frac{(1+i)^2}{(1+r)^3}\right]^5 = \frac{(1+i)^{10}}{(1+r)^{15}}$

4.8 Exponente uno, cero, negativo y fraccionario

En este acápite los números m , n y x representan números enteros positivos.

Ampliando la noción de exponente para cualquier número racional, los cuales incluyen: uno, cero, negativos y fracciones, tenemos:

$$\begin{aligned} 4^4 &= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \\ 4^3 &= 4 \times 4 \times 4 \\ 4^2 &= 4 \times 4 \\ 4^1 &= ? \end{aligned}$$

$$4^0 = ?$$

$$4^{-1} = ?$$

$$4^{-2} = ?$$

$$4^{1/2} = ?$$

En las tres primeras igualdades, el exponente indica el número de veces que la base se toma como factor.

¿Cuál es el mínimo número de factores que puede haber en una multiplicación? y ¿cuál sería el menor exponente en una potenciación? La respuesta a las dos preguntas es 2, porque en una multiplicación no puede haber menos de dos factores y la potenciación está definida para exponentes enteros mayores que 1.

¿Puede una multiplicación tener sólo un factor o ninguno? ¿Es posible que en una multiplicación exista un número negativo de factores? ¿Puede existir un número no entero de factores, por ejemplo medio factor?

La respuesta a las tres preguntas anteriores es negativa. Entonces, ¿qué sentido tendrían las expresiones 4^1 , 4^0 , 4^{-1} , 4^{-2} , $4^{1/2}$? Para que las expresiones anteriores cobren sentido, tenemos que definir la potenciación para exponentes uno, cero, negativo y fraccionario.

4.8.1 Exponente uno

La fórmula del punto 4.2 es $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a \neq 0$, $(m - n) > 1$.

Dando arbitrariamente valores a los exponentes m y n , cuidando que cumplan la condición anterior tenemos:

$$\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$$

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$$

$$\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$$

En la expresión $\frac{a^3}{a^2}$, $m = 3$ y $n = 2$, no se cumple $(m - n) > 1$. Procedamos a su desarrollo:

$$\frac{a^3}{a^2} = \frac{a.a.a}{a.a} = a \quad (1)$$

Aunque la condición $(m - n) > 1$ no se cumple, apliquemos la fórmula de 4.2

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 \quad (2)$$

¿Cómo debemos definir a^1 para que la fórmula de 4.2 sea aplicable también cuando $(m - n) = 1$? Haciendo $(2) = (1)$, obtenemos

$$a^1 = a$$

La expresión a^1 que no tiene sentido en sí misma, se considera convencionalmente igual a a . De esta manera la fórmula de 4.2 se cumple cuando $m > n$.

4.8.2 Exponente cero

Por 4.8.1 sabemos que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ cuando $a \neq 0$, $m > n$.

Dando arbitrariamente valores a los exponentes m y n cuidando que cumplan la condición anterior, tenemos:

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$$

$$\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$$

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1$$

En la expresión $\frac{a^2}{a^2}$, $m = 2$ y $n = 2$, no se cumple $m > n$. Procedamos a su desarrollo:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a.a}{a.a} = 1 \quad (1)$$

Aunque la condición $m > n$ no se cumple, apliquemos la fórmula de 4.2

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 \quad (2)$$

¿Cómo debemos definir a^0 para que la fórmula de 4.2 sea aplicable cuando $m = n$? Haciendo (2) = (1), obtenemos

$$\boxed{a^0 = 1} \quad a \neq 0$$

La expresión a^0 que no tiene sentido en sí misma, se considera convencionalmente igual a 1. De esta manera la fórmula de 4.2 se cumple cuando $m \geq n$

Ejemplos

1. $(1+i)^0 = 1$ si $i \neq -1$
2. $1,5^0 = 1$
3. $\left[1 + \frac{TNA}{m}\right]^0 = 1$ si $\frac{TNA}{m} \neq -1$

4.8.3 Exponente negativo

Por 4.8.2 sabemos que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ cuando $a \neq 0$, $m \geq n$.

Dando arbitrariamente valores a los exponentes m y n cuidando que cumplan la condición anterior, tenemos:

$$\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$$

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1$$

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$$

En la expresión $\frac{a^2}{a^3}$, $m = 2$ y $n = 3$, $n = m + 1$, no cumpliéndose $m \geq n$.

Procedamos a su desarrollo:

$$\frac{a^2}{a^3} = \frac{a.a}{a.a.a} = \frac{1}{a} \quad (1)$$

Aunque la condición $m \geq n$ no se cumple, apliquemos la fórmula de 4.2

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} \quad (2)$$

¿Cómo debemos definir a^{-1} para que la fórmula de 4.2 sea aplicable cuando $n = m + 1$? Haciendo (2) = (1), obtenemos:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a \neq 0$$

Hemos definido la potenciación para exponente -1. Para generalizar la potenciación a cualquier exponente entero negativo, utilizaremos el mismo razonamiento.

Como $n > m$, podemos hacer n igual a m más algún número entero positivo que designaremos x , obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} m + x &= n \\ m - n &= -x \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+x}} = \frac{a^m}{a^m a^x} = \frac{1}{a^x} \quad (3)$$

Aunque la condición $m \geq n$ no se cumple, apliquemos la fórmula de 4.2

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{-x} \quad (4)$$

Haciendo (3) = (4) obtenemos

$$\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}} \quad a \neq 0$$

La expresión a^{-x} que no tiene sentido en sí misma cuando $-x$ es negativo, se considera convencionalmente igual a la unidad dividida por a^x . Como consecuencia de la fórmula anterior, obtenemos:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} \quad a \neq 0$$

Ejemplos

$$1. \quad 8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$$

$$2. \quad (1+i)^{-3} = \frac{1}{(1+i)^3}$$

$$3. \quad \frac{(1+i)^{-4}}{(1+f)^{-6}} = \frac{(1+f)^6}{(1+i)^4}$$

4.8.4 Exponente fraccionario

El desarrollo de la siguiente expresión $\sqrt[3]{2^6}$, puede hacerse de la manera siguiente:

$$\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^{2 \times 3}} = \sqrt{(2^2)^3} = 2^2 = 2^{6/3}$$

Hemos convertido la expresión original en una potencia de exponente fraccionario cuyo numerador es igual al exponente de la cantidad subradical y cuyo denominador es igual al índice de la raíz.

En forma general, dada la expresión $\sqrt[n]{a^m}$ y si

$$\frac{m}{n} = x, \quad x \text{ es un número entero}$$

entonces:

$$m = xn$$

tenemos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{xn}} = \sqrt[n]{(a^x)^n} = a^x = a^{m/n}$$

entonces:

$$\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}} \quad (1)$$

Esta fórmula se cumple cuando m/n es un número entero. Por ejemplo, cuando $m = 6$ y $n = 3$, m/n es un número entero: $m/n = 2$.

Pero si $m = 3$ y $n = 2$, m/n es un número no entero: $m/n = 3/2$, necesitamos definir la potenciación para exponente racional no entero.

Dada la expresión $\sqrt[n]{a^m}$ y si

$$\frac{m}{n} = z, \text{ } z \text{ es un número racional no entero} \quad (2)$$

entonces:

$$m = zn$$

tenemos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{zn}}$$

De acuerdo a 4.5, $a^{mn} = (a^m)^n$, cuando m y n son enteros mayores que 1. Habiendo definido la potenciación para exponentes uno, cero y negativo, la fórmula de 4.5 se cumple cuando m y n son enteros cualesquiera. A pesar que a^z tiene como exponente un número racional no entero, apliquemos la fórmula:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{zn}} = \sqrt[n]{(a^z)^n} = a^z = a^{m/n}$$

¿Cómo debemos definir $a^{m/n}$ para que la fórmula de 4.5 se cumpla cuando m/n es un racional no entero?

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$n \neq 0$$

Esta última fórmula define la potenciación para cualquier número racional.

Ejemplos

$$1. \quad \sqrt[4]{3^{12}} = 3^{12/4} = 3^3 = 27$$

$$2. \quad \sqrt[30]{1,05^5} = 1,05^{5/30} = 1,05^{1/6}$$

$$3. \quad \sqrt[30]{1,05^{20}} \sqrt[30]{1,03^{18}} \sqrt[360]{1,24^{15}} = (1,05^{20/30}) (1,03^{18/30}) (1,24^{15/360}) \\ = (1,05^{2/3}) (1,03^{3/5}) (1,24^{1/24})$$

Propiedad

De la siguiente expresión:

$$3^2 = 9$$

podemos deducir que 3 es igual a $\sqrt{9}$, o lo que es lo mismo:

$$3 = 9^{1/2}$$

Vemos que el exponente 2 del primer miembro ha pasado al segundo miembro como 1/2.

Generalizando, si a no es negativo, $x \neq 0$:

$$a^x = b$$

$$(a^x)^{1/x} = b^{1/x}$$

$$a = b^{1/x}$$

$$a^x = b \rightarrow a = b^{1/x}$$

$$a \geq 0, x \neq 0$$

Ejemplos

1. $8^x = 3 \rightarrow 8 = 3^{1/x}$
2. Si $c^d = e$, despejar c

$$c = e^{1/d}$$
3. $(1 + i)^4 = 1,05$. Hallar i
 $i = 1,05^{1/4} - 1 = 0,012272234 = 1,23\%$

4.9 Leyes de la radicación

$$1. \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Demostración

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \times m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$2. \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$3. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Demostración

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$4. \quad \sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Demostración

$$\sqrt[nr]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$5. \quad \sqrt[n]{k^n a} = k \sqrt[n]{a}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{k^n a} = (k^n a)^{\frac{1}{n}} = (k^n)^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} = k \sqrt[n]{a}$$

$$6. \quad k \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n a}$$

Demostración

$$k \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n a}$$

4.10 Ejercicios resueltos

$$1. \quad f^p \cdot f^q \cdot f^r = f^{p+q+r}$$

$$2. \quad x^3 \cdot x^{1/3} = x^{9/3 + 1/3} = x^{10/3}$$

$$3. \quad i^{1/2} \cdot i^{1/3} = i^{1/2 + 1/3} = i^{3/6 + 2/6} = i^{5/6}$$

$$4. \quad (1+i)^n (1+i) (1+r)^m (1+r)^2 = (1+i)^{n+1} (1+r)^{m+2}$$

$$5. \quad (1+i)^{n+1} (1+i)^{n-1} = (1+i)^{n+1+n-1} = (1+i)^{2n}$$

$$6. \quad (1+i)^{1/n} (1+i)^n = (1+i)^{1/n+n} = (1+i)^{(n^2+1)/n}$$

$$7. \quad (1+f)^{n-1} (1+f)^{1/n} = (1+f)^{n-1+1/n}$$

$$8. \quad (1+i)^6 \div (1+i)^0 = (1+i)^6$$

$$9. \quad \frac{(1+i)^{n-6}}{(1+i)^{n-2}} = (1+i)^{n-6-(n-2)} = (1+i)^{n-6-n+2} = (1+i)^{-4} = \frac{1}{(1+i)^4}$$

$$10. \quad \frac{(1+i)^n}{(1+i)} = (1+i)^{n-1}$$

$$11. \quad \{[(1+i)^3]^2\}^6 = (1+i)^{36}$$

$$12. \quad \frac{(1+i)^n}{(1+i)^2} = (1+i)^{n-2}$$

$$13. \quad \frac{1,05^{n+4}}{1,05^{n-6}} = 1,05^{n+4-n+6} = 1,05^{10}$$

$$14. \quad (a^6)^{1/6} = a$$

$$15. \quad [(1+i)^{2/3}]^{12} = (1+i)^8$$

Simplifique y luego opere su calculadora

16. $(1,05^{1/3}) (1,05^6) = 1,05^{1/3 + 18/3} = 1,05^{19/3} = 1,36206832$
17. $(1 + 0,1)^0 (1 + 0,1)^2 (1 + 0,1)^3 (1 + 0,1) (1 + 0,1)^4 = (1,1)^{10} = 2,59374246$
18. $1,09^{-3} \div 1,09^{-7} = 1,09^{-3 - (-7)} = 1,09^{-3 + 7} = 1,09^4 = 1,41158161$
19. $\frac{[(1 + 0,25)^2]^6}{[(1 + 0,25)^3]^8} = \frac{1,25^{-24}}{1,25^{24}} = 1,25^{-48} = 0,000022301$
20. $\frac{\left[\sqrt[7]{(1 + 0,2)^2}\right]^{15}}{\left[\sqrt[7]{(1 + 0,2)^2}\right]^3} = \left[\sqrt[7]{(1 + 0,2)^2}\right]^{5-3} = [(1 + 0,2)^{2/7}]^2 = 1,2^{4/7} = 1,1098043$
21. $\left[\frac{1}{16}\right]^{-0,75} = \left[\frac{1}{16}\right]^{-3/4} = 16^{3/4} = 8$
22. $\left[\frac{2}{10}\right]^{-3/2} = \left[\frac{1}{5}\right]^{-3/2} = 5^{3/2} = 11,18033989$
23. $1,06^{-3} = \frac{1}{1,06^3} = 0,839619283$
24. $\left[1 + \frac{0,36}{12}\right]^{84/30} - 1 = 0,086286117$
25. $\frac{0,05(1 + 0,05)^{36}}{(1 + 0,05)^{36} - 1} = 0,06043445712$
26. $\sqrt[360]{\frac{1,157625}{1,04^{4/5}}} - 1 = 0,000319479$

4.11 Ejercicios propuestos

- | | |
|--|-------------------------|
| 1. $(1 + 0,02)^2 (1 + 0,02)^8 (1 + 0,02)^4$ | Rp. $1,02^{14}$ |
| 2. $x^4 \cdot x^3$ | Rp. x^7 |
| 3. $(1 + 0,3)^0 (1 + 0,3) (1 + 0,3)^2$ | Rp. $1,03^3$ |
| 4. $(1 + 0,03)^0 (1 + 0,04)^2 (1 + 0,06)^0 (1 + 0,07)^6$ | Rp. $(1,04^2) (1,07^6)$ |
| 5. $1,06^6 \div 1,06^3$ | Rp. $1,06^3$ |

- | | | | |
|-----|---|-----|----------------------|
| 6. | $\left[\frac{4x}{2z} \right]^3$ | Rp. | $\frac{64x^3}{8z^3}$ |
| 7. | $1,06^3 \div 1,06^6$ | Rp. | $1,06^{-3}$ |
| 8. | $1,06^4 \div 1,06^6$ | Rp. | $1,06^{-2}$ |
| 9. | $(1 + 0,03)^0 (1 + 0,02)^0 (1 + 0,06)^0$ | Rp. | 1 |
| 10. | $[2a^2 + 4a^2 + 8]^0$ | Rp. | 1 |
| 11. | $1,06^{-2}$ | Rp. | $1/1,06^2$ |
| 12. | $1,08^{-2} \div 1,08^4$ | Rp. | $1,08^{-6}$ |
| 13. | $[(1 + 0,2)^6]^3$ | Rp. | $1,2^{18}$ |
| 14. | $z^4 \div z^8$ | Rp. | $1/z^4$ |
| 15. | $[(1 + 0,2)^3]^6 \div 1,02^0$ | Rp. | $1,2^{18}$ |
| 16. | $\{[(1 + 0,3)^2]^6\}^{-2}$ | Rp. | $1,3^{-24}$ |
| 17. | $\{[(1 + 0,3)^2]^6\}^{-2} \div [(1 + 0,3)^2]^3$ | Rp. | $1,3^{-30}$ |
| 18. | $(1 + i)^{n-2} \div (1 + i)^{n-1}$ | Rp. | $(1 + i)^{-1}$ |
| 19. | $[(1 + i)^{-1}]^n$ | Rp. | $(1 + i)^{-n}$ |
| 20. | $\sqrt[8]{(1 + 0,2)^3}$ | Rp. | $1,2^{3/8}$ |
| 21. | $\frac{\left[\sqrt[6]{(1 + 0,3)^2} \right]^5}{\left[\sqrt[6]{(1 + 0,3)^2} \right]^3}$ | Rp. | $1,3^{2/3}$ |
| 22. | $(1 + 0,07)^{8/4}$ | Rp. | $1,07^2$ |
| 23. | $(1 + 0,1)^{3/5} \div (1 + 0,1)^{2/6}$ | Rp. | $1,1^{4/15}$ |
| 24. | $[(1 + 0,2)^2 (1 + 0,2)^5] \div [(1 + 0,2)^0 (1 + 0,2)^3]$ | Rp. | $1,2^4$ |

Resuelva operando su calculadora

- | | | | |
|-----|---|-----|-------------|
| 25. | $\left(1 + \frac{0,05}{360} \right)^{136} - 1$ | Rp. | 0,019067091 |
| 26. | $2\,000 \left[\frac{0,04(1 + 0,04)^8}{(1 + 0,04)^8 - 1} \right]$ | Rp. | 297,06 |
| 27. | $\frac{1 - (1 + 0,03)^{-5}}{0,03}$ | Rp. | 4,579707187 |

28. $\sqrt[180]{1 + 0,2}$ Rp. 1,001013411
29. $\sqrt[360]{\frac{2\ 250}{2\ 000}} - 1$ Rp. 0,000327229
30. $[(1,02^6)(1,03^2)(1,035^4)]^2 - 1$ Rp. 0,879636015
31. $[1 - (1 - 1,05)]^{-4}$ Rp. 0,8227024748
32. $\frac{\left(1 + \frac{0,24}{360}\right)^{49} - 1}{(1 + 0,04)^{-2}}$ Rp. 0,03590355084
33. $2\ 000 \left[\frac{\frac{0,04}{(1 + 0,04)^6 - 1}}{(1 + 0,04)} \right]$ Rp. 289,93
34. $\left[\frac{500}{0,05} \right] \left[\frac{(1 + 0,05)^6 - 1}{0,05(1 + 0,05)^6} - \frac{6}{(1 + 0,05)^6} \right]$ Rp. 5 984

5. Logaritmos

En la siguiente expresión:

$$2^x = 16$$

¿Qué valor debe tomar x para que se cumpla la igualdad? Por tanteo o por simple inspección, obtenemos que x es igual a 4. Entonces el número 16 puede expresarse como una potencia de base 2 y exponente 4. El exponente 4 se denomina logaritmo del número 16 en base 2.

Sin embargo, el cálculo por tanteo no es siempre la manera más práctica de obtener la solución. Surge la necesidad de introducir el uso de una operación llamada *logaritmación*.

Dados una base b positiva y una potencia N , el exponente x que cumpla $b^x = N$, se llama *logaritmo de N en base b* . La operación de calcular el logaritmo se llama *logaritmación* y se representa $\text{Log}_b N$.

$$\text{Si } b^x = N \rightarrow x = \text{Log}_b N$$

El último término de la igualdad anterior se lee "logaritmo de N en base b" o "logaritmo en base b de N".

Logaritmo de un número N, en una base positiva b diferente de la unidad, es el exponente x al que hay que elevar b para obtener N.

Aplicando el concepto anterior a una base 10 tenemos:

N	=	10^x	entonces	x	=	$\text{Log}_{10}N$
1 000	=	10^3	entonces	3	es el logaritmo de	1 000
100	=	10^2	entonces	2	es el logaritmo de	100
10	=	10^1	entonces	1	es el logaritmo de	10
1	=	10^0	entonces	0	es el logaritmo de	1
0,1	=	10^{-1}	entonces	-1	es el logaritmo de	0,1
0,01	=	10^{-2}	entonces	-2	es el logaritmo de	0,01
0,001	=	10^{-3}	entonces	-3	es el logaritmo de	0,001

Los logaritmos pueden adoptar diferentes bases. Sin embargo, cuando ésta no se especifica se asume que la base es 10.

Ejemplos

$N = b^x$	entonces	$x = \text{Log}_b N$
$729 = 3^6$	6 es el logaritmo de 729 en base 3	$6 = \text{Log}_3 729$
$512 = 4^{4,5}$	4,5 es el logaritmo de 512 en base 4	$4,5 = \text{Log}_4 512$
$512 = 8^3$	3 es el logaritmo de 512 en base 8	$3 = \text{Log}_8 512$

Debido a que el interés compuesto es una función exponencial que responde a la fórmula $(1 + i)^n$, la utilización de logaritmos es el camino para efectuar el cálculo de n.

5.1 Antilogaritmos

Dada la siguiente expresión:

$$3^2 = N$$

se cumple que $2 = \text{Log}_3 N$. ¿Cuál es el valor de N ? N es igual a 9.

$$3^2 = 9$$

En la expresión anterior denominamos base al número 3, exponente al número 2 y antilogaritmo al número 9. Note que el exponente es un logaritmo y el antilogaritmo es una potencia.

Dados b , un número positivo diferente de la unidad y x , logaritmo de cierto número en base b , a la operación de calcular el número N que cumpla $x = \text{Log}_b N$ se le llama antilogaritmación. El resultado se puede representar $\text{Antilog}_b x$.

$$\text{Si } b^x = N \rightarrow N = \text{Antilog}_b x$$

El último término de la igualdad anterior se lee "antilogaritmo de x en base b " o "antilogaritmo en base b de x ".

Antilogaritmo de un exponente x , en una base positiva b diferente de la unidad, es la potencia N de base b y exponente x .

De lo anterior deducimos que

1. $\text{Antilog}_b x = b^x$
2. $\text{Si } \text{Log}_b N = x \rightarrow N = \text{Antilog}_b x$

Ejemplos

1. Si $\text{Log}_2 16 = 4$ entonces 16 es el antilogaritmo de 4
 $\text{Antilog}_2 4 = 16 = 2^4$
2. $\text{Antilog}_3 4 = 3^4 = 81$
3. $\text{Antilog}_{(1+i)} n = (1+i)^n$

5.2 Ejercicios resueltos

1. Calcular el logaritmo de 27 en base $\sqrt[3]{3}$

Solución

$$\text{Log}_{\sqrt[3]{3}} 27 = x \quad x = 9$$

Operación

$$(\sqrt[3]{3})^x = 27$$

$$(3^{1/3})^x = 3^3$$

$$3^{x/3} = 3^3$$

$$x/3 = 3$$

$$x = 9$$

Comprobación

$$N = (\sqrt[3]{3})^9$$

$$N = (3^{1/3})^9$$

$$N = 3^3$$

$$N = 27$$

En la comprobación se observa que 27 es el antilogaritmo de 9 (en base $\sqrt[3]{3}$)

2. Hallar el número cuyo logaritmo en base $1/64$ es -2

Solución

$$\text{Log}_{1/64} N = -2$$

Operación

$$N = \left(\frac{1}{64}\right)^{-2}$$

$$N = \left(\frac{1}{2^6}\right)^{-2}$$

$$N = 2^{12}$$

$$N = 4096$$

Comprobación

$$\left(\frac{1}{64}\right)^x = 4096$$

$$2^{-6x} = 2^{12}$$

$$-6x = 12$$

$$x = -2$$

3. Si $\text{Log}_{64/125} N = \text{Log}_{11} \sqrt[3]{121}$. Hallar N

Para el desarrollo de este problema se halla primero $\text{Log}_{11} \sqrt[3]{121}$ y con el resultado se calcula N.

Cálculo de $\text{Log}_{11} \sqrt[3]{121}$

$$\text{Log}_{11} \sqrt[3]{121} = x$$

$$11^x = \sqrt[3]{121}$$

$$11^x = 11^{2/3}$$

$$x = 2/3$$

Cálculo de N

$$\text{Log}_{64/125} N = 2/3$$

$$N = \left(\frac{64}{125} \right)^{2/3}$$

$$N = \left[\left(\frac{4}{5} \right)^3 \right]^{2/3}$$

$$N = \left(\frac{4}{5} \right)^2$$

$$N = \frac{16}{25}$$

4. Si $\text{Log}_b 8/27 = 3$, hallar b

Solución

Operación

$$b^3 = \frac{8}{27}$$

$$b = \left(\frac{2^3}{3^3} \right)^{1/3}$$

$$b = \frac{2}{3}$$

Comprobación

$$\text{Log}_{2/3} \frac{8}{27} = x$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^x = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3$$

$$x = 3$$

5. Hallar el valor de $A = \text{Log}_4 \frac{\sqrt[3]{8}}{16} + \text{Log}_3 81$

Solución

$$\text{Log}_4 \frac{\sqrt[3]{8}}{16} = x_1$$

$$\text{Log}_3 81 = x_2$$

$$4^{x_1} = \frac{\sqrt[3]{8}}{16}$$

$$3^{x_2} = 81$$

$$2^{2x_1} = \frac{2}{2^4}$$

$$3^{x_2} = 3^4$$

$$2^{2x_1} = 2^{-3}$$

$$x_2 = 4$$

$$2x_1 = -3$$

$$x_1 = -3/2$$

$$A = x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{8}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

6. Si $\text{Log}_b 9 = \text{Log}_8 4$, hallar b

Solución

$$\text{Log}_8 4 = x$$

$$\text{Log}_b 9 = 2/3$$

$$8^x = 4$$

$$b^{2/3} = 9$$

$$2^{3x} = 2^2$$

$$b = 9^{3/2}$$

$$3x = 2$$

$$b = 27$$

$$x = 2/3$$

7. Hallar el valor de $A = 6\text{Log}_{1/7} 343 + 4\text{Log}_{2/4} \sqrt[3]{8} + 20\text{Log}_{16} 256$

Solución

$$\text{Log}_{1/7} 343 = x_1$$

$$\text{Log}_{2/4} \sqrt[3]{8} = x_2$$

$$\text{Log}_{16} 256 = x_3$$

$$(1/7)^{x_1} = 343$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)^{x_2} = \sqrt[3]{8}$$

$$16^{x_3} = 256$$

$$\begin{array}{lll}
 7^{-x_1} = 7^3 & \left(\frac{2}{2^2}\right)^{x_2} = 2 & 16^{x_3} = 16^2 \\
 -x_1 = 3 & 2^{-x_2} = 2^1 & x_3 = 2 \\
 x_1 = -3 & x_2 = -1 &
 \end{array}$$

Luego $A = 6x_1 + 4x_2 + 20x_3$
 $A = 6(-3) + 4(-1) + 20(2)$
 $A = 18$

5.3 Ejercicios propuestos

1. Hallar el Logaritmo de 4 en base 8. Rp. 2/3
2. Hallar el Logaritmo de $\sqrt[3]{(1+i)^{-6}}$ en base $(1+i)$, i positiva Rp. -2
3. Hallar el número cuyo Logaritmo en base 6 es 2 Rp. 36
4. Hallar el número cuyo Log en base 64 es 1/3 Rp. 4
5. Si $\text{Log}_4 N = \text{Log}_3 81$, hallar N Rp. 256
6. Si $\text{Log}_b \sqrt[5]{243} = 1/5$, hallar b Rp. 243
7. Si $\text{Log}_b 2187 = 7$, hallar b Rp. 3
8. Si $\text{Log}_b 36 = \text{Log}_{12} \sqrt[3]{1728}$, hallar b Rp. 36
9. Hallar el valor de $A = 2 \text{Log}_4 1024 + 6 \text{Log}_{10} 0,001 + 1/2 \text{Log}_6 296 + 8 \text{Log}_2 64$ Rp. 42

5.4 Propiedades fundamentales de los logaritmos

Si m , n , a , b son positivos, a y b diferentes de 1, tenemos:

Propiedad I.- El logaritmo de un producto de dos números reales positivos es la suma de los logaritmos de ambos números.

$$\text{Log}_b(m.n) = \text{Log}_b m + \text{Log}_b n$$

1. Haciendo $\text{Log}_b m = A$; entonces $m = b^A$
2. Haciendo $\text{Log}_b n = B$; entonces $n = b^B$

3. Efectuando el producto $m.n = b^A . b^B = b^{A+B}$
4. Entonces, $\text{Log}_b m.n = A + B$
5. Reemplazando A y B por sus equivalentes:

$$\text{Log}_b(m.n) = \text{Log}_b m + \text{Log}_b n$$

Propiedad II.- El logaritmo del cociente de dos números reales positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\text{Log}_b \frac{m}{n} = \text{Log}_b m - \text{Log}_b n$$

1. Haciendo $\text{Log}_b m = A$; entonces $m = b^A$
2. Haciendo $\text{Log}_b n = B$; entonces $n = b^B$
3. Efectuando $\frac{m}{n} = \frac{b^A}{b^B}$

$$\frac{m}{n} = b^{A-B}$$
4. Entonces, $\text{Log}_b \frac{m}{n} = A - B$
5. Reemplazando A y B por sus equivalentes:

$$\text{Log}_b(m/n) = \text{Log}_b m - \text{Log}_b n$$

Propiedad III.- El logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al producto del logaritmo del número y el exponente de la potencia.

$$\text{Log}_b m^n = n \text{Log}_b m$$

1. Haciendo $\text{Log}_b m = A$; tenemos $m = b^A$
2. Luego $m^n = (b^A)^n$

$$m^n = b^{nA}$$
3. Entonces, $\text{Log}_b m^n = nA$
4. Reemplazando A tenemos: $\text{Log}_b m^n = n \text{Log}_b m$

Propiedad IV.- El logaritmo de la raíz n-ésima de un número positivo es igual al logaritmo del número entre el índice de la raíz.

$$\boxed{\text{Log}_b \sqrt[n]{m} = \frac{\text{Log}_b m}{n}}$$

$$\begin{aligned}\text{Log}_b \sqrt[n]{m} &= \text{Log}_b m^{1/n} \\ &= \frac{1}{n} \text{Log}_b m\end{aligned}$$

$$\text{entonces } \text{Log}_b \sqrt[n]{m} = \frac{\text{Log}_b m}{n}$$

Propiedad V.-

$$\boxed{\text{Log}_b m = \text{Log}_b m^n = \text{Log}_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{m}}$$

1. Haremos (I) $\text{Log}_b m = A$ y (II) $\text{Log}_b m^n = B$

2. De (II)

$$(b^n)^B = m^n$$

$b^{nB} = m^n$, elevando ambos miembros a la $1/n$ tenemos

$$b^B = m$$

$$B = \text{Log}_b m$$

3. Entonces, $A = B$

4. Por lo tanto: $\text{Log}_b m = \text{Log}_b m^n$

5. $\text{Log}_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{m} = \text{Log}_{b^{1/n}} m^{1/n}$ es un caso particular de (II) en el que el exponente n se reemplaza por $1/n$

Propiedad VI.-

$$\boxed{\text{Log}_b m = \frac{1}{n} \text{Log}_b m^n}$$

Elevando la base y el número m del primer término de la igualdad anterior a $1/n$ (propiedad V) y luego aplicando la propiedad III, tenemos:

$$\text{Log}_b m = \text{Log}_b m^{1/n} = (1/n) \text{Log}_b m^n$$

Propiedad VII.-

$$\text{Log}_b a^m = \frac{m}{n} \text{Log}_b a$$

Elevando la base y el número a^m del primer término de la igualdad anterior a $1/n$ (propiedad V) y luego aplicando la propiedad III, tenemos:

$$\text{Log}_b a^m = \text{Log}_b a^{m/n} = \frac{m}{n} \text{Log}_b a$$

Propiedad VIII.-

$$\text{Log}_b a \cdot \text{Log}_a b = 1$$

1. Haciendo $\text{Log}_b a = A$; tenemos

$$a = b^A \quad (1)$$

2. Reemplazando (1) en el primer término de la igualdad de la propiedad VIII y aplicando las propiedades V y III, tenemos:

$$\text{Log}_b b^A \cdot \text{Log}_b b = A \text{Log}_b b^{1/A} = A \cdot \frac{1}{A} = 1$$

Propiedad IX.-

$$\text{Log}_{a/b} m = \frac{\text{Log}_a m}{1 - \text{Log}_a b}$$

1. Si hacemos $\text{Log}_{a/b} m = A$; entonces $(a/b)^A = m$

$$a^A / b^A = m$$

$$a^A = mb^A$$

2. Tomando logaritmos en base a a ambos miembros:

$$\text{Log}_a a^A = \text{Log}_a mb^A$$

$$A = \text{Log}_a m + A \text{Log}_a b$$

$$A - A \text{Log}_a b = \text{Log}_a m$$

$$A(1 - \text{Log}_a b) = \text{Log}_a m$$

$$\text{Log}_{a/b} m = \frac{\text{Log}_a m}{1 - \text{Log}_a b}$$

Propiedad X.-

$$\text{Log}_a m = \frac{\text{Log}_b m}{\text{Log}_b a}$$

1. Haciendo

$$\text{Log}_a m = A \quad (1)$$

entonces:

$$a^A = m \quad (2)$$

2. Logaritmando en una base real positiva deseada a cada miembro de la igualdad (2)

$$\text{Log}_b a^A = \text{Log}_b m$$

$$A \text{Log}_b a = \text{Log}_b m$$

$$A = \frac{\text{Log}_b m}{\text{Log}_b a} \quad (3)$$

3. Reemplazando (3) en (1)

$$\text{Log}_a m = \frac{\text{Log}_b m}{\text{Log}_b a}$$

Propiedad XI.-

$$B^n = A \rightarrow n = \frac{\text{Log}_b A}{\text{Log}_b B}$$

$$B^n = A$$

$$\text{log}_b B^n = \text{log}_b A$$

$$n \text{log}_b B = \text{log}_b A$$

$$n = \frac{\text{Log}_b A}{\text{Log}_b B}$$

5.5 Ejercicios resueltos

1. Represente la siguiente expresión como un logaritmo con coeficiente 1

$$A = 3\text{Log}_2 3 + 1/2 \text{Log}_2 4 - 2\text{Log}_2 3$$

Solución

$$\begin{aligned} A &= \text{Log}_2 3^3 + \text{Log}_2 \sqrt{4} - \text{Log}_2 3^2 \\ &= \text{Log}_2 \frac{3^3 \sqrt{4}}{3^2} \\ &= \text{Log}_2 6 \end{aligned}$$

2. Hallar el valor de $\text{Log}_2 6$, usando una calculadora que sólo calcula logaritmos en base 10.

Solución

$$\text{Log}_2 6 = \frac{\text{Log } 6}{\text{Log } 2} = 2,584963$$

3. Hallar el valor de $A = \text{Log}_4 \frac{\sqrt{4096} \left(\frac{1}{8}\right)^5}{32 \left(\frac{1}{16}\right)^3}$

Solución

$$\begin{aligned} A &= \text{Log}_4 \sqrt{4096} + \text{Log}_4 (1/8)^5 - \text{Log}_4 32 - \text{Log}_4 (1/16)^3 \\ &= 1/2 \text{Log}_4 2^{12} + 6\text{Log}_4 2^{-3} - \text{Log}_4 2^5 - 3\text{Log}_4 2^{-4} \\ &= 6\text{Log}_4 2 - 18\text{Log}_4 2 - 5\text{Log}_4 2 + 12\text{Log}_4 2 \\ &= -5\text{Log}_4 2 \\ &= -2,5 \end{aligned}$$

4. Calcular b en la siguiente expresión

$$2\text{Log}_b 6 + 3\text{Log}_b 4 + \text{Log}_b 4 - 5\text{Log}_b 4 = 2$$

Solución

$$\text{Log}_b 6^2 + \text{Log}_b 4^3 + \text{Log}_b 4 - \text{Log}_b 4^5 = 2$$

$$\text{Log}_b \left(\frac{6^2 \times 4^3 \times 4}{4^5} \right) = 2$$

$$\text{Log}_b 9 = 2$$

$$b^2 = 9$$

$$b = 9^{1/2}$$

$$b = 3$$

5. Calcular N en la siguiente expresión: $\text{Log}_{64} N + \text{Log}_4 N + \text{Log}_2 N = 10$

Solución

$$\text{Log}_2 N + \text{Log}_2 N + \text{Log}_2 N = 10$$

$$1/6 \text{Log}_2 N + 1/2 \text{Log}_2 N + \text{Log}_2 N = 10$$

$$5/3 \text{Log}_2 N = 10$$

$$\text{Log}_2 N = 2^6$$

$$\text{Log}_2 N = 26$$

$$N = 2^6$$

$$N = 64$$

6. Calcular n en la siguiente expresión: $P(1 + i)^n = S$, siendo i positiva.

Solución

$$\text{Log} P + n \text{Log}(1 + i) = \text{Log} S$$

$$n = \frac{\text{Log} S - \text{Log} P}{\text{Log}(1 + i)}$$

5.6 Ejercicios propuestos

Represente las siguientes expresiones como un logaritmo con coeficiente 1

1. $\text{Log}_{1,1} 4 + \text{Log}_{1,1} 6 + 4(\text{Log}_{1,1} 8 - \text{Log}_{1,1} 4)$ Rp. $\text{Log}_{1,1} 384$
2. $4\text{Log}_{1,05} 6 + 3\text{Log}_{1,05} 4 - 4\text{Log}_{1,05} 4$ Rp. $\text{Log}_{1,05} 324$
3. $\text{Log} 6 + \text{Log} 3 + 3\text{Log} 8 - 2\text{Log} 4$ Rp. $\text{Log} 576$
4. Calcular N en la siguiente expresión:
 $\text{Log} N = 1/5 \text{Log} 243 + 1/4 \text{Log} 81 + 1 - 1/3 \text{Log} 27$ Rp. $N = 30$
5. Hallar el valor de:
 $A = 6\text{Log}_6 216 + 4\text{Log}_3 243 + 2\text{Log}_2 64 + 5\text{Log}_4 16$ Rp. $A = 60$

6. Variable y constante

Dado el símbolo x que representa a uno o más valores, se dice que x es una *variable*. Si el símbolo x representa a un solo valor se denomina *constante*. Al conjunto de todos los valores que puede tomar x se le llama *dominio de la variable* x .

Una variable es *continua* en un intervalo, cuando puede adoptar todos los valores del intervalo dado. En caso contrario es una variable *discreta* en ese intervalo.

Ejemplos

Constante

1. El principal en los contratos de Certificados de Depósitos a Plazo (CDP).
2. El costo fijo en el corto plazo y en un determinado rango de aplicabilidad.
3. Los aranceles mínimos en las transacciones financieras efectuadas en la Bolsa de Valores.
4. Las comisiones fijas por derecho de crédito.

Variable continua

1. El interés compuesto capitalizable instantáneamente.
2. El tiempo n en interés continuo

Variable discreta

1. El interés compuesto con capitalización diaria, mensual, trimestral, etc.
2. El tiempo de una operación financiera, el cual de acuerdo a disposiciones legales vigentes, sólo puede adoptar números enteros de días. Los dominios de la variable en las operaciones financieras clasificados por su plazo son:

- Corto plazo { 1 día, 2 días, ... , 360 días }
- Mediano plazo { 361 días, 362 días, ... , 720 días }
- Largo plazo es { 721 días, 722 días, 723 días, ... }

7. Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad de dos o más cantidades o expresiones. Son ejemplos de ecuaciones:

$$\begin{aligned}a + b &= c \\ I &= Pin \\ S &= P (1 + i)^n\end{aligned}$$

En el presente libro, las dos últimas ecuaciones representan las *fórmulas* del interés simple y monto compuesto.

7.1 Transposición de términos

La transposición de términos consiste en trasladar términos de una ecuación de un miembro al otro. Transponiendo términos puede despejarse una variable en función de otra.

Si a los miembros de una misma ecuación se le:

- multiplica, suma o resta una misma cantidad,
- divide por una misma cantidad distinta de cero,

los valores de cada miembro de la ecuación pueden modificarse, pero siguen siendo iguales entre sí. Si los miembros de la ecuación son cantidades no negativas, se mantiene una igualdad si a cada miembro se le potencia, logaritma, antilogaritma o radica.

Ejemplo 1.- Si a cada miembro de la siguiente igualdad $20 = 20$, se le resta 1, tenemos:

$$\begin{aligned} 20 &= 20 \\ 20 - 1 &= 20 - 1 \\ 19 &= 19 \end{aligned}$$

Los valores de cada término han cambiado, pero se mantiene una igualdad.

Es evidente que si $19 = 19$, entonces $19 = 19$. Esto se expresa en los siguientes axiomas:

$$\begin{aligned} a &= a \\ \text{Si } a &= b \quad \text{entonces} \quad b = a. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.- Despejar i en la siguiente ecuación $I = Pin$

$$Pin = I$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por Pn tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{Pin}{Pn} &= \frac{I}{Pn} \\ i &= \frac{I}{Pn} \end{aligned}$$

7.1.1 Reglas

De acuerdo a lo anterior podemos obtener lo siguiente

$$1. \quad a + b = c \quad \text{entonces} \quad a = c - b$$

$$\text{Demostración} \quad a + b = c$$

Restando b a ambos miembros:

$$a + b - b = c - b$$

$$a = c - b$$

Una variable que se encuentra sumando en un miembro, puede pasar al otro miembro restando.

$$2. \quad a - b = c \quad \text{entonces} \quad a = c + b$$

$$3. \quad a \cdot b = c \quad \text{entonces} \quad a = c/b$$

4. $a / b = c$ entonces $a = c \cdot b$
5. $a^n = b$ entonces $a = \sqrt[n]{b}$ si a es positivo
6. $\sqrt[n]{a} = b$ entonces $a = b^n$
7. $\text{Log}_b a = c$ entonces $a = \text{Antilog}_b c = b^c$
8. $\text{Antilog}_b a = c$ entonces $a = \text{Log}_b c$

Ejercicios

Siendo i positivo y todos los factores distintos de 0, calcule k en las siguientes ecuaciones:

1. $R \cdot \text{FAS}_{0,05; n} = 2R (1 + i)^{-k} \cdot \text{FAS}_{0,05; n}$ Rp. $k = 76,38$

2. $S = R (1 + i)^{-k} \text{FAS}_{i; n}$ Rp. $k = - \frac{\text{Log} \left(\frac{S}{R \text{FAS}_{i; n}} \right)}{\text{Log} (1 + i)}$

7.2 Expresión recíproca

Examine las siguientes expresiones:

$$1 \times 1 = 1$$

$$2 \times 1 = 2$$

$$3 \times 1 = 3$$

A partir de las igualdades anteriores podemos llegar a la conclusión que cualquier número real multiplicado por 1 da como resultado el mismo número, razón por la cual el 1 es considerado *elemento neutro multiplicativo*. En las siguiente expresiones

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$4 \times \frac{1}{4} = 1$$

puede notarse que $\frac{1}{2}$ ó 0,5 es el inverso multiplicativo de 2 porque $2 \times \frac{1}{2}$ es igual al elemento neutro de la multiplicación. Así también $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ son los inversos multiplicativos de 3 y 4 respectivamente.

Generalizando:

El *inverso multiplicativo* o *recíproco* de una cantidad C diferente de cero, es aquel que multiplicado por C es igual al elemento neutro de la multiplicación.

Propiedades

I. Si $a \neq 0$, su recíproco es igual a $\frac{1}{a}$, porque

$$a \left(\frac{1}{a} \right) = 1$$

II. Si $a \neq 0$, su recíproco puede representarse de la forma a^{-1} , porque

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

III. Si un número diferente de cero, puede representarse de la forma $\frac{A}{B}$, su recíproco puede representarse de la forma $\frac{B}{A}$ ó $B \cdot A^{-1}$, porque

$$\left(\frac{A}{B} \right) \left(\frac{B}{A} \right) = 1 = \left(\frac{A}{B} \right) B \cdot A^{-1}$$

IV. Si un número diferente de 0, puede representarse de la forma $\frac{1}{A}$, su recíproco es igual a A, porque

$$\left(\frac{1}{A} \right) A = 1$$

V. Si un número diferente de 0 puede representarse de la forma a^n entonces su recíproco es igual a a^{-n} , porque

$$a^n \cdot a^{-n} = 1$$

Ejemplos

1. Si x es un número diferente de 0. Calcular su expresión recíproca.

Rp. $\frac{1}{x}$ ó x^{-1}

2. Calcular el recíproco de $\frac{a}{b}$

Rp. $\frac{b}{a}$ ó ba^{-1}

3. Calcular el recíproco de $(1 + i)^n$ cuando $i \neq -1$.

Rp. $(1 + i)^{-n}$

Ejercicios

Calcular las expresiones recíprocas de

1. $n = H/f$

2.
$$\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

3.
$$\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

7.3 Sistema de ecuaciones de primer grado simultáneas

Un sistema de dos ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas x e y , es aquel que tiene la forma:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

donde a, b, c, d, e, f son constantes conocidas.

Para resolverlo podemos emplear diferentes métodos: tanteo, sustitución, igualación, reducción de una incógnita. Este último se explica a continuación.

7.3.1 Método de reducción de una incógnita

Dado el siguiente sistema

$$2x + 4y = 3 \quad (1)$$

$$- 3x + 8y = 6 \quad (2)$$

Multiplicando ambos miembros de (1) por -2 para igualar los coeficientes de y

$$- 4x - 8y = - 6 \quad (3)$$

$$- 3x + 8y = 6$$

Sumando (3) y (2), eliminamos la variable y

$$- 7x = 0$$

$$x = 0$$

Al eliminar la variable y , hemos obtenido x . Ahora podemos despejar y de cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo, de (1) se obtiene

$$y = (3 - 2x) / 4$$

$$y = 3/4$$

Ejemplo

Calcular R y R' en el siguiente sistema

$$11\,368,9265 = R \left[\frac{1,05^{10} - 1}{0,05(1,05^{10})} \right] + R' \left[\frac{1,04^{12} - 1}{0,04(1,04^{12})} \right]$$

$$18\,309,5906 = R \left[\frac{1,05^{10} - 1}{0,05} \right] + R' \left[\frac{1,04^{12} - 1}{0,04} \right]$$

Solución

Los datos presentados difieren de los exactos debido al redondeo a cuatro decimales.

$$11\,368,9265 = 7,7217 R + 9,3851 R'$$

$$18\,309,5906 = 12,5779 R + 15,0258 R'$$

Multiplicando la primera ecuación por 15,0258 y la segunda ecuación por - 9,3851 tenemos

$$170\,827,2774 = 116,0253 R + 141,0183 R' \quad (1)$$

$$-171\,836,8586 = -118,0444 R - 141,0183 R' \quad (2)$$

Sumando miembro a miembro

$$\begin{aligned} -1\,009,5812 &= -2,0192 R \\ R &= 500 \end{aligned} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (1)

$$170\,827,2774 = 116,0253 (500) + 141,0183 R'$$

$$170\,827,2774 = 58\,012,6434 + 141,0183 R'$$

$$R' = 800$$

7.4 Ecuación cuadrática

Una *ecuación cuadrática* (o *de segundo grado*) de una incógnita x es aquella que puede ser llevada a la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

La ecuación anterior puede tener hasta dos soluciones denominadas x_1 y x_2 dadas por las siguientes fórmulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las dos expresiones anteriores pueden representarse como una sola, de la siguiente manera:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Obtenga el valor de i en la siguiente ecuación:

$$1\,800 = \frac{1\,000}{(1+i)} + \frac{1\,000}{(1+i)^2}$$

Solución

$$1\,800 = \frac{1\,000}{(1+i)} + \frac{1\,000}{(1+i)^2} = \frac{1\,000(1+i) + 1\,000}{(1+i)^2}$$

$$1\,800 = \frac{1\,000 + 1\,000i + 1\,000}{1 + 2i + i^2}$$

$$1\,800 + 3\,600i + 1\,800i^2 = 2\,000 + 1\,000i$$

$$1\,800i^2 + 2\,600i - 200 = 0$$

$$i_{1,2} = \frac{-2\,600 \pm \sqrt{2\,600^2 - 4(1\,800)(-200)}}{2(1\,800)}$$

$$i_1 = 0,0732 \quad i_2 = -1,5177$$

7.5 Ecuación bicuadrada

Es una ecuación de la forma

$$ay^4 + by^2 + c = 0$$

Para solucionarlo podemos convertirlo a una ecuación cuadrática

$$a(y^2)^2 + b(y^2) + c = 0$$

Haciendo $x = y^2$ se tiene

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para calcular x aplicamos la fórmula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Pero $y^2 = x$, entonces $y = \pm \sqrt{x}$

Así como la ecuación bicuadrada la hemos convertido a cuadrática, podemos aplicar a otras ecuaciones un procedimiento similar. Por ejemplo:

$$ay^8 + by^4 + c = 0$$

La convertimos a

$$a(y^4)^2 + b(y^4) + c = 0$$

Haciendo $x = y^4$ tenemos

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y la solucionamos como si fuera una ecuación cuadrática.

8. Progresiones

Una *progresión* es una sucesión de números o expresiones, dispuestos con arreglo a una ley fija. Los números o expresiones sucesivas de la serie reciben el nombre de *términos de la progresión*.

8.1 Progresión aritmética

Una progresión aritmética (P.A.) es una serie de términos, en la que cada uno después del primero, se obtiene del anterior sumándole un número constante al que se le da el nombre de diferencia común.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{P.A.} & = & a_1, & a_2, & a_3, & \dots & a_n, \dots \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & \text{Primer} & & & & \text{Enésimo} \\ & & \text{término} & & & & \text{término} \end{array}$$

n entero positivo

$$\text{Si } n > 1 \text{ entonces } d = a_n - a_{n-1}$$

8.1.1 Enésimo término de una P.A.

Tabla No. 1

Término	Equivalente a	En función de a_1
1	a_1	$a_1 = a_1 + 0d$
2	$a_2 = a_1 + d$	$a_1 = a_1 + 1d$
3	$a_3 = a_2 + d$	$a_3 = a_1 + 2d$
:	:	:
n	$a_n = a_{n-1} + d$	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
:	:	:

De la Tabla No. 1 tenemos

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad (1)$$

La fórmula (1) calcula el n -ésimo término de una progresión aritmética.

8.1.2 Suma de los n primeros términos

La suma de los n primeros términos de una P.A. es:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad n \text{ sumandos}$$

Lo cual es equivalente a:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad (a)$$

Por la propiedad conmutativa:

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \quad (b)$$

Sumando (a) y (b) tenemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + d + a_n - d) + (a_1 + 2d + a_n - 2d) + \dots + (a_n - 2d + a_n - 2d) + (a_n - d + a_n - d) + (a_n + a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad (2)$$

La fórmula (2) calcula la suma de los n primeros términos de una P.A. en función del primer y el n -ésimo término.

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$S_n = (n/2) [a_1 + a_n + (n - 1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d] \quad (3)$$

La fórmula (3) calcula la suma de una P.A. en función de la razón.

8.1.3 Problemas resueltos

1. Hallar el término 60 en P.A. = - 9, - 6, - 3

Solución

$$\begin{aligned} a_{60} &= ? \\ a_1 &= - 9 \\ n &= 60 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ a_{60} &= - 9 + (59)3 \\ a_{60} &= 168 \end{aligned}$$

2. En la P.A. = - 9, - 6, - 3,, 168 ¿qué posición ocupa el número 168?

Solución

$$\begin{aligned} a_n &= 168 \\ a_1 &= - 9 \\ d &= 3 \\ n &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 168 &= - 9 + (n - 1)3 \\ 168 + 9 + 3 &= 3n \\ n &= 6 \end{aligned}$$

3. Si un capital de S/. 1 000 colocado a una tasa mensual del 10% ha producido un interés simple de S/. 3,33 en un día y de S/. 6,66 en dos días ¿qué interés simple habrá producido en 43 días?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 a_{43} = ? & a_n = a_1 + (n - 1)d \\
 a_1 = 3,33 & a_{43} = 3,33 + (42)3,33 \\
 n = 43 & a_{43} = 143,19 \\
 d = 3,33 &
 \end{array}$$

4. El segundo término de una P.A. es 6,66 y el término 42 es 143,33. Halle el término 120.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 a_2 = 6,66 & a_1 + d = 6,66 \quad (1) \\
 a_{43} = 143,33 & a_1 + 42d = 143,33 \quad (2) \\
 a_{120} = ? & \text{Restando (2) de (1)} \\
 & 41d = 136,67 \\
 & d = 3,33 \\
 & \text{Reemplazando d en (1)} \\
 & a_1 + 3,33 = 6,66 \\
 & a_1 = 3,33 \\
 & \text{Entonces} \\
 & a_{120} = a_1 + 119d \\
 & a_{120} = 3,33 + 119(3,33) \\
 & a_{120} = 400
 \end{array}$$

5. Halle la suma de los 15 primeros números de P.A. = 3, 6, 9,

Solución

$$\begin{array}{ll}
 S_{15} = ? & S_{15} = n/2 [2a_1 + (n - 1)d] \\
 n = 15 & S_{15} = 15/2 [2(3) + (14 \times 3)] \\
 a_1 = 3 & S_{15} = 360 \\
 d = 3 &
 \end{array}$$

6. Calcule el importe total a pagar en la adquisición de una máquina cuyo precio de contado es de S/. 5 000, y ha sido financiada con una cuota inicial de S/. 1 000 más 8 amortizaciones mensuales iguales de S/. 500 c/u. El proveedor aplica una tasa de interés mensual del 2% sobre los saldos deudores.

Solución

En el momento cero el saldo financiado es de S/. 4 000 (5 000 - 1 000).
El cuadro de amortización es el siguiente:

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				4 000
1	580	80	500	3 500
2	570	70	500	3 000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\begin{array}{ll}
 a_1 = 580 & S_8 = n/2 [2a_1 + (n - 1) d] \\
 a_2 = 570 & S_8 = 4 [2 (580) + (7) (- 10)] \\
 d = - 10 & S_8 = 4 \ 360
 \end{array}$$

8.2 Progresión geométrica

Una progresión geométrica (P.G.) es una serie de términos en la que cada uno, después del primero, es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante, llamada razón de la progresión.

P.G. = $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$	
\downarrow	\downarrow
Primer término	Enésimo término

n entero positivo

$$\text{Si } n > 1 \text{ entonces } r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$a_{n-1} \neq 0$$

r = razón común de la progresión geométrica

8.2.1 Enésimo término

Tabla No. 2

Término	Equivalente a	En función de a_1
1	a_1	$a_1 = a_1 r^0$
2	$a_2 = a_1 r$	$a_1 = a_1 r^1$
3	$a_3 = a_2 r$	$a_3 = a_1 r^2$
:	:	:
n	$a_n = a_{n-1} r$	$a_n = a_1 r^{n-1}$
:	:	:

De la Tabla No. 2 tenemos

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (4)$$

La fórmula (4) calcula el enésimo término de una progresión geométrica.

8.2.2 Suma de los n primeros términos

La suma de los n primeros términos de una P.G. (S_n) es:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (a)$$

Reemplazando (4) en (a) tenemos

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} \quad (b)$$

Multiplicando ambos miembros por una cantidad r diferente de 1

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \quad (c)$$

Restando (b) de (c)

$$\begin{array}{rcl}
 rS_n & = & a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \\
 S_n & = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} \\
 \hline
 rS_n - S_n & = & -a_1 \qquad \qquad \qquad + a_1 r^n \\
 S_n (r - 1) & = & a_1 r^n - a_1 \\
 S_n & = & \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} (c) \\ (b) \end{array}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \quad (5) \quad r \neq 1$$

Multiplicando el numerador y el denominador de (5) por -1

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (6) \quad r \neq 1$$

Las fórmulas (5) y (6) pueden ser utilizadas para obtener la suma de cualquier progresión geométrica de razón diferente de 1. Sin embargo, para evitar términos negativos, utilizaremos (5) cuando la P.G. sea creciente y (6) cuando la P.G. sea decreciente.

8.2.3 Límite de la suma de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos

Aplicando el límite de (6) cuando $n \rightarrow +\infty$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Pero como r positivo menor que 1, $r^n \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1 - 0}{1 - r}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \frac{a_1}{1 - r} \quad (7)$$

8.2.4 Problemas resueltos

1. Halle el décimo término en la P.G. = 620, 310, 155 ...

Solución

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= ? & a_{10} &= a_1 r^{n-1} \\
 a_1 &= 620 & a_{10} &= 620 (0,5)^9 \\
 r &= 0,5 & a_{10} &= 1,2109375 \\
 n &= 10
 \end{aligned}$$

2. Halle el número de términos en la P.G. = 620, 310, 155, ... 1,2109375

Solución

$$\begin{aligned}
 n &= ? & a_n &= a_1 r^{n-1} \\
 a_n &= 1,2109375 & 1,2109375 &= 620 (0,5)^{n-1} \\
 a_1 &= 620 & \text{Log } 0,001953125 &= n-1 \text{ Log } 0,5 \\
 r &= 0,5 & n &= 10
 \end{aligned}$$

3. Halle los tres primeros términos de una P.G. sabiendo que el sexto término es 19,375 y el décimo es 1,2109375

Solución

$$\begin{aligned}
 a_1, a_2, a_3 &= ? & a_6 &= 19,375 & \rightarrow & 19,375 = a_1 r^5 \quad (1) \\
 r &= ? & a_{10} &= 1,2109375 & \rightarrow & 1,2109375 = a_1 r^9 \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$a_6 = 19,375$$

$$a_{10} = 1,2109375$$

Dividiendo (2) entre (1) para calcular r

$$0,0625 = r_4$$

$$0,5 = r$$

Reemplazando r en (1)

$$19,375 = a_1 (0,5^5)$$

$$a_1 = 620$$

$$a_2 = 620(0,5^1) = 310$$

$$a_3 = 620(0,5^2) = 155$$

$$\text{P.G.} = 620, 310, 155$$

4. Un capital de S/. 1 000 000 colocado a una tasa mensual del 8% ha producido un interés de S/. 2 568,661 en el primer día y de S/. 2 575,259 en el segundo día, calcule el interés efectivo que ganó dicho capital los días 29 y 30 y el interés acumulado al día 30.

Solución

$$a_{29}, a_{30} = ?$$

$$S_{30} = ?$$

$$a_1 = 2\,568,661$$

$$r = 1,002568653$$

Interés del día 29

$$a_{29} = 2\,568,661(1,002568653^{28}) = 2\,759,96$$

Interés del día 30

$$a_{30} = 2\,568,661(1,002568653^{29}) = 2\,767,05$$

Interés acumulado al día 30

$$S_{30} = \frac{2\,568\,661(1,002568653^{30} - 1)}{1,002568653 - 1} = 80\,000$$

5. Hallar el primer término y la razón de una P.G. de ocho términos si la suma de los dos primeros términos es 8 y la de los dos últimos es 5 832.

Solución

$$r = ?$$

a) Cálculo de la razón

$$a_1 + a_2 = 8$$

$$a_1 + a_1 r = 8$$

$$\rightarrow a_1(1 + r) = 8$$

(1)

$$a_7 + a_8 = 5\,832$$

$$a_1 r^6 + a_1 r^7 = 5\,832$$

$$\rightarrow a_1 r^6(1 + r) = 5\,832$$

(2)

Dividiendo (2) por (1)

$$\frac{a_1 r^6(1 + r)}{a_1(1 + r)} = \frac{5\,832}{8}$$

$$r^6 = 729$$

$$r = 3$$

b) Cálculo del primer término

$$a_1 + a_1 r = 8$$

$$a_1(1 + r) = 8$$

$$a_1(1 + 3) = 8$$

$$a_1 = 2$$

6. Obtenga la suma en la siguiente P.G. :

$$R(1 + i)^0, R(1 + i)^1, R(1 + i)^2, R(1 + i)^3, \dots, R(1 + i)^{n-2}, R(1 + i)^{n-1}$$

Solución

$$S_n = ?$$

$$a_1 = 1$$

$$S = R[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

El término entre corchetes es una P.G. creciente de razón $r = (1+i)$ que se resuelve aplicando:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

tenemos:

$$S_n = R \left[\frac{1[(1+i)^n - 1]}{1+i-1} \right]$$

$$S_n = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

7. Obtenga la suma en la siguiente P.G. :

$$R(1+i)^{-1}, R(1+i)^{-2}, R(1+i)^{-3}, \dots, R(1+i)^{-n+2}, R(1+i)^{-n+1}, R(1+i)^{-n}$$

Solución

$$S_n = ?$$

$$r = (1+i)^{-1}$$

$$S = R[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}]$$

El término entre corchetes es una P.G. que se resuelve aplicando:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

tenemos:

$$S_n = R \left[\frac{(1+i)^{-1}[1 - (1+i)^{-n}]}{1 - (1+i)^{-1}} \right]$$

$$S_n = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{[1 - (1+i)^{-1}](1+i)} \right]$$

$$S_n = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

9. Interpolación

Dada una ecuación de equivalencia financiera donde la incógnita es i ó n , su valor puede encontrarse por "tanteo" asignándole arbitrariamente valores hasta lograr que se verifique la igualdad. El número de aproximaciones sucesivas para encontrar el valor de la incógnita puede reducirse notablemente aplicando la interpolación.

Existen diversos métodos de interpolación, los principales son:

- Interpolación lineal.
- Interpolación por promedios o semisuma.

Ejemplo 1.- Una impresora de inyección de tinta tiene como precio de contado \$ 300. Sin embargo al crédito puede adquirirse sin cuota inicial y con dos pagos de \$ 180 a 30 y 60 días cada una. ¿Cuál es la tasa de interés cobrada?

Solución

$$300 = \frac{180}{(1 + i)} + \frac{180}{(1 + i)^2}$$

La expresión anterior es una ecuación de grado 2 o cuadrática que puede ordenarse adecuadamente para que responda a la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, la cual se soluciona aplicando la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$i = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)}$$

$$i_1 = 0,130662$$

$$i_2 = -1,530662$$

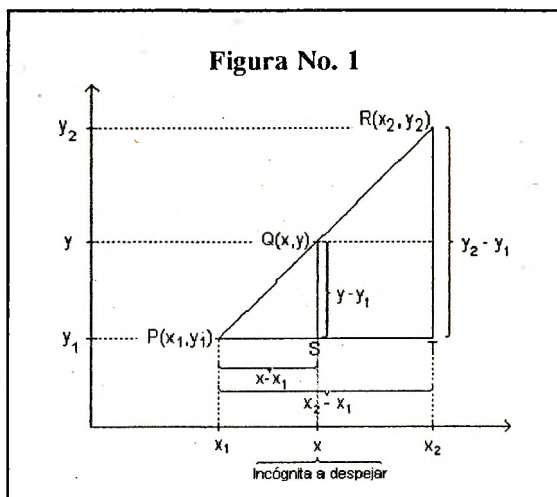
Siendo la incógnita una tasa de interés, la respuesta adecuada es 13,06%.

Sin embargo, en la práctica suelen presentarse ecuaciones de grado quinto, sexto o superior las cuales no pueden resolverse por los métodos expuestos anteriormente. En estos casos podemos aplicar la interpolación lineal.

9.1 Interpolación lineal

En la siguiente figura aparece una parte del gráfico de una *función lineal continua creciente* representada por un segmento de recta limitado por los puntos P y R de coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ respectivamente. El punto Q de coordenadas $(x; y)$ representa otro punto cualquiera del segmento.

Para despejar x conociendo los puntos x_1, x_2, y_1, y, y_2 , escogamos un punto S de coordenadas $(x; y_1)$ para formar un triángulo rectángulo PSQ y un punto T de coordenadas $(x_2; y_1)$ para formar un triángulo rectángulo PTR semejante a PSQ.



Por semejanza de triángulos PSQ y PTR tenemos:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{TR}} \quad \text{ó} \quad \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{|y - y_1|}{|y_2 - y_1|}$$

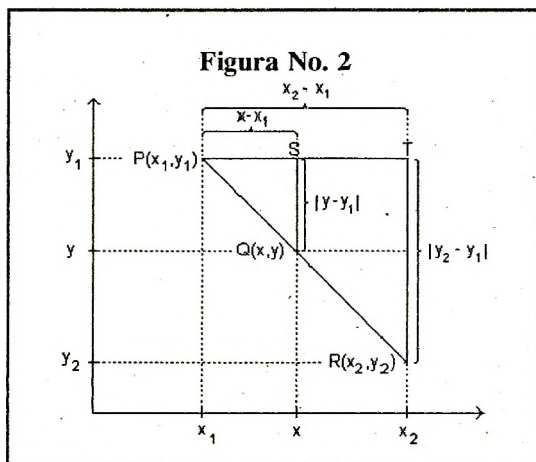
Para despejar x es necesario eliminar las barras de valor absoluto efectuando los artificios necesarios de tal manera que la igualdad se mantenga. En este caso las expresiones entre barras son positivas, razón por la cual se obtiene:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$x - x_1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} [x_2 - x_1]$$

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} [x_2 - x_1] \quad (8)$$

Ahora ponemos el caso de que la función lineal sea decreciente:



Por semejanza de triángulos PSQ y PTR tenemos:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{TR}} \quad \text{ó} \quad \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{|y - y_1|}{|y_2 - y_1|}$$

Hemos puesto la igualdad anterior de modo que las barras de valor absoluto se puedan eliminar automáticamente pues en el primer miembro las expresiones dentro de las barras son positivas, y en el segundo miembro las dos expresiones dentro de las barras son negativas.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$x - x_1 = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} [x_2 - x_1]$$

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} [x_2 - x_1] \quad (8)$$

Note que se ha obtenido la misma fórmula para una función creciente y para una función decreciente.

Ejemplo 2.- Un artefacto electrodoméstico cuyo precio de contado es \$ 800 se adquiere con una cuota inicial de \$ 500 y 4 letras mensuales de \$ 100 cada una. ¿Qué tasa de interés i mensual se ha cargado al financiamiento?

Solución

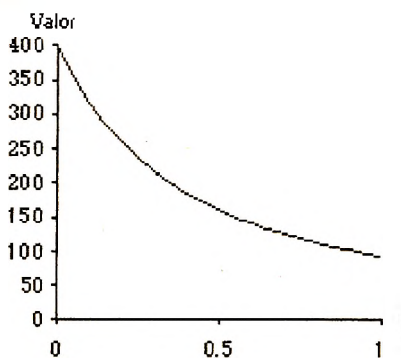
$$300 = \frac{100}{(1 + i)} + \frac{100}{(1 + i)^2} + \frac{100}{(1 + i)^3} + \frac{100}{(1 + i)^4}$$

El planteamiento corresponde a una ecuación de cuarto grado cuya solución se obtiene interpolando diversos valores que arbitrariamente se dan a i con el objeto que se cumpla la igualdad.

Asignando diversos valores a i para aproximar el segundo miembro de la ecuación a 300, tenemos el siguiente cuadro:

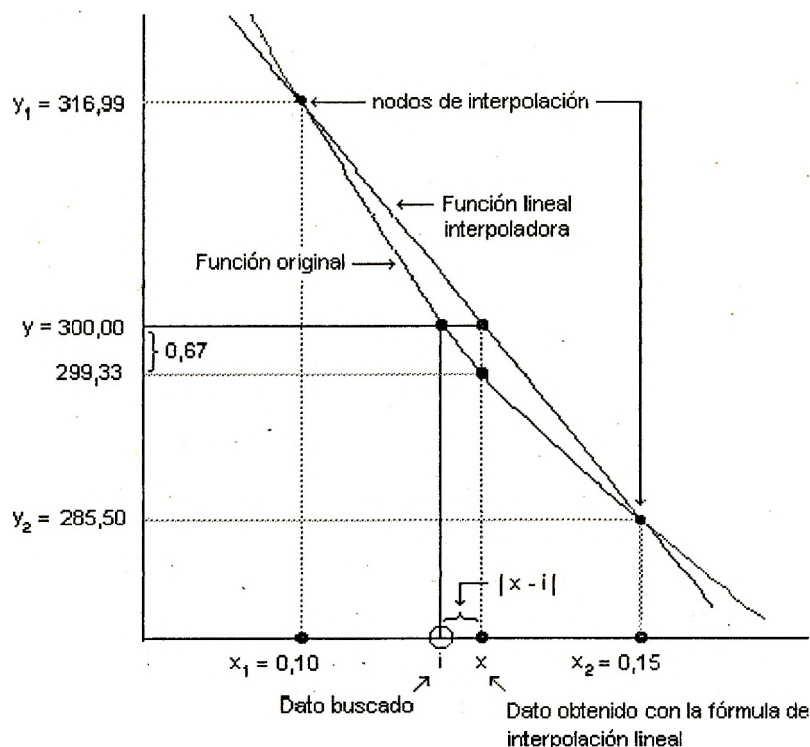
i	Valor
0,00	400,00
0,05	354,60
0,10	316,99
?	300,00
0,15	285,50
0,50	160,49
0,80	113,09
1,00	93,75
:	:

Con estos datos construyamos un gráfico.



Se comprueba que la función es decreciente, no lineal y que el valor buscado se encuentra entre 0,10 y 0,15. Estos dos valores serán las coordenadas x de nuestros *nodos de interpolación* (x_1 y x_2).

Ampliando el gráfico anterior y comparándola con una función lineal continua que pase por los puntos (0,10; 316,99) y (0,15; 285,50) tenemos:



Haciendo:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0,10 & y_1 = 316,99 \\
 x = ? & y = 300,00 \\
 x_2 = 0,15 & y_2 = 285,50
 \end{array}$$

Aplicando (8) tenemos:

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} [x_2 - x_1]$$

$$x = 0,10 + \frac{300 - 316,99}{285,50 - 316,99} [0,15 - 0,10] = 0,127$$

9.2 Método del promedio o de la semisuma

Frente al método de interpolación lineal calculado con la fórmula (8), podemos realizar iteraciones sucesivas calculando un x aproximado igual a la semisuma de x_1 y x_2 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Ejemplo.- Aplicando el método del promedio al ejemplo 2 tenemos:

$$x = \frac{0,10 + 0,15}{2} = 0,125$$

Siguiendo el mismo procedimiento y efectuando interpolaciones sucesivas con los datos encontrados, obtenemos como respuesta con aproximación de 3 decimales $i = 12,589\%$ mensual.

9.3 Interpolación lineal a través de proporciones

Para efectuar una interpolación lineal a través de proporciones es necesario, en primer lugar, ordenar los valores conocidos y desconocidos y, establecer la igualdad de las proporciones.

Al obtener la fórmula (8), establecimos que para una función lineal creciente o decreciente, se cumple:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Haciendo

$$\begin{array}{ll} x - x_1 = a & y - y_1 = c \\ x_2 - x_1 = b & y_2 - y_1 = d \end{array}$$

entonces:

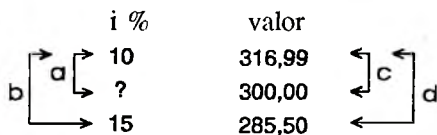
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a = \left(\frac{c}{d} \right) b$$

Reemplazando los términos por los valores que lo conforman y tabulando los datos:



Aplicando las proporciones al ejemplo 2 y tomando i en tanto por ciento tenemos:



$$a = \left(\frac{c}{d} \right) b$$

$$a = \left(\frac{316,99 - 300}{316,99 - 285,50} \right) (15 - 10) = 2,7$$

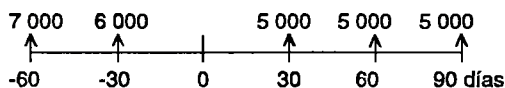
Siguiendo la tendencia creciente de las tasas expresadas en tanto por ciento, la respuesta se obtiene adicionando el resultado de la interpolación a la base inferior: $10\% + 2,7\% = 12,7\%$.

10. Diagramas de tiempo-valor y de flujo de caja

En la evaluación de inversiones, los flujos de efectivo, sean ingresos o egresos, pueden originarse en cualquier instante de un horizonte de tiempo determinado. Sin embargo, para facilitar los cálculos, se considerará que todos los flujos ocurridos en un período de tiempo han sucedido al final de ese período. Estos flujos suelen representarse en el denominado *diagrama de tiempo-valor* en el cual quedan registrados los ingresos, egresos, el sentido del tiempo (considerando el presente como el momento 0), la tasa de evaluación y la incógnita a resolver.

Ejemplo 1.- Representar el diagrama de flujo de caja para una empresa que hoy tiene deudas de S/. 8 000 y 7 000 vencidas hace 30 y 60 días cada una respectivamente y además debe cancelar un préstamo en 3 cuotas mensuales de S/. 5 000 cada una, las cuales vencen dentro de 30, 60 y 90 días respectivamente.

Solución



Por el valor cronológico del dinero a través del tiempo, no pueden efectuarse sumas o restas de flujos de efectivo ubicados en diferentes momentos de un horizonte temporal, ya que cada uno de ellos tiene un poder adquisitivo diferente, es decir, representan cantidades nominales, cuya comparación para efectos de cálculo debe efectuarse en una determinada *fecha focal* (fecha de evaluación). Para trasladar estas cantidades del momento en que se encuentran hasta la fecha focal, es necesario utilizar una tasa apropiada (de interés, de inflación, etc.).

Diagrama de flujo de caja

El *flujo de caja* es el resultado de ingresos y desembolsos de efectivo en un intervalo de tiempo dado, pudiendo ser evaluado en cualquier instante del tiempo en forma neta como la diferencia entre las entradas y los desembolsos:

$$\text{FLUJO DE CAJA NETO} = \text{ENTRADAS DE EFECTIVO} - \text{DESEMBOLSOS DE EFECTIVO}$$

Si los flujos de caja los representamos en un diagrama de tiempo-valor lo convertimos en un diagrama de flujo de caja con las siguientes particularidades:

- Convención de fin de período: como los flujos de caja son el resultado de una corriente de ingresos y pagos de efectivo, para efectos de evaluación se considerará que ellos ocurren al fin de un período de interés.
- El tiempo o momento 0 corresponde al presente y el momento 1 el final de un período de interés. Se escogerá una unidad de tiempo conveniente:

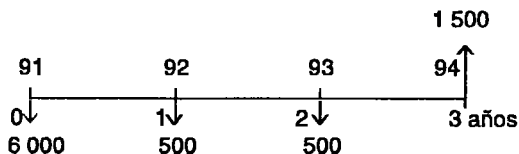
mes, trimestre, semestre, año, etc. La tasa de interés debe coincidir con la unidad de tiempo. Un determinado momento futuro se expresará con un número positivo, mientras que un determinado momento pasado se expresará con un número negativo.

- Son flujos de caja positivos: los ingresos, las utilidades, los beneficios, las rentas percibidas, etc.
- Son flujos de caja negativos: las inversiones, los desembolsos, los costos, los gastos, las rentas pagadas, etc.
- Los flujos de caja positivos serán indicados con flechas hacia arriba y, a la inversa, los flujos de caja negativos serán indicados con flechas hacia abajo.
- Los diagramas de flujo de caja en algún punto de evaluación pueden ser presentados en forma bruta (ingresos y egresos) o en forma neta (ingresos - egresos).
- Las representaciones de los flujos de caja pueden ser efectuados desde el punto de vista de la entidad financiadora o del prestatario, de acuerdo a la característica del problema.

Ejemplo 2.- Represente en un diagrama de flujo de caja neto la siguiente información: a fines del año 1994 hemos comprado una camioneta en \$ 6 000 la cual ha tenido un costo de mantenimiento anual de \$ 500 durante 3 años y al final de su tercer año de vida efectuamos su venta por \$ 2 000.

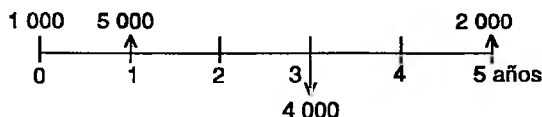
Solución

Año	Entradas	Desembolsos	Flujo de caja
1994	0	6 000	- 6 000
1995	0	500	-500
1996	0	500	- 500
1997	2 000	500	1 500



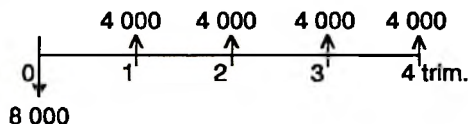
Ejemplo 3.- Dibuje un flujo de caja que muestre ingresos de S/. 1 000, 5 000 y 2 000 en los momentos 0, 1 y 5 respectivamente y un egreso de S/. 4 000 en el momento 3.

Solución



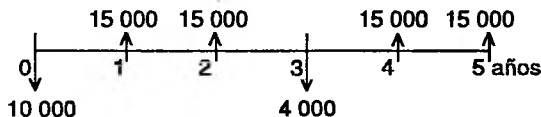
Flujo de caja convencional

Consiste en un desembolso inicial seguido de una serie de ingresos de efectivo. Por ejemplo, una empresa puede invertir hoy S/. 8 000 y pronosticar entradas de efectivo de S/. 4 000 al final de los próximos cuatro trimestres.



Flujo de caja no convencional

Es cualquier patrón de flujo de caja, en el cual a un desembolso inicial le siguen entradas y desembolsos intermitentes. Ello puede suceder, por ejemplo, en la compra de un activo fijo que requiera un desembolso de efectivo de S/. 10 000 y generar entradas de S/. 15 000 durante dos años; en el tercer año necesita una reparación evaluada en S/. 4 000, después de la cual sigue generando ingresos de S/. 15 000 durante el cuarto y quinto año.



11. Operación de calculadora

El desarrollo de los cálculos a efectuar en las operaciones matemático-financieras se ha visto facilitado, en gran magnitud, por la versatilidad de las calculadoras manuales que hace innecesario y obsoleto el uso de las "tablas de factores".

El aprendizaje moderno del curso de Matemática Financiera implica:

- El planteamiento de una ecuación de equivalencia financiera que resuelva el problema propuesto. Conocimiento que se obtiene a través de la demostración de las fórmulas correspondientes y su aplicación en la solución de la mayor cantidad de problemas posibles.
- El dominio del manejo de una máquina calculadora científica o financiera.
- El dominio de un *software* especializado. Para la mayoría de los casos basta el uso de alguna hoja de cálculo, por ejemplo, Lotus 1-2-3 o Excel.

Calculadoras científicas

Son calculadoras que apoyan y facilitan los cálculos de ingeniería. Sin embargo, su dominio puede ser de gran utilidad también en el cálculo financiero. Muchas de las calculadoras científicas modernas poseen diferentes modos, por ejemplo las calculadoras Casio fx-3600P, fx-5500L y otras presentan incluso diferentes menús de aplicación. Estas máquinas pueden operar en los siguientes modos:

Casio fx-3600P

Mode . : ejecuta cálculos manuales y programados.

Mode 0: "LRN" para escribir programas.

Mode 1: " $\int dx$ " para operar con integrales.

Mode 2: "LR" para análisis de regresión.

Mode 3: "SD" para desviación estándar.

Mode 4: "DEG" grados como unidad de ángulos.

Mode 5: "RAD" radianes como unidad de ángulos.

Mode 6: "GRA" gradientes como unidad de ángulos.

Mode 7: "FIX" número fijo de dígitos decimales.

Mode 8: "SCI" asignación "científica", número de dígitos significativos.

Mode 9: "NORM" libera la asignación "fija" o científica".

Casio fx-5500L

F1: MATRIX menú de matriz.

F2: EQN menú de ecuaciones cuadráticas y simultáneas hasta con 4 incógnitas.

F3: $\int dx$ menú de integración.

F4: CMPLX menú de número complejo.

F5: BASE-N menú de Base-N.

F6: STAT menú de estadística.

Las máquinas científicas modernas poseen además: memorias independientes, memorias variables, jerarquía de las operaciones, generación de números aleatorios, paréntesis, raíz cuadrada, raíz enésima, factorial, cambios de signo +/-, conversión sexagesimal a decimal, seno, coseno, tangente, funciones hiperbólicas, logaritmo común y natural, antilogaritmos, funciones recíprocas, permutaciones, combinaciones, etc.

Calculadoras financieras

Las calculadoras financieras vienen programadas para realizar directamente los cálculos financieros, los problemas pueden resolverse ingresando solamente los datos que la fórmula requiera. Entre las más difundidas se encuentran la Hewlett Packard y la Financial Consultant FC-200 de Casio. Esta última presenta lo siguiente:

Modos de operación

Mode 1: "RUN" para cálculos manuales y para los programas.

Mode 2: "WRT" para crear nuevos programas.

Mode 3: "PCL" para borrar programas.

Mode 4: "FIN" para cálculos de funciones y financieros.

Mode 5: "LR" para cálculos de regresión.

Mode 6: "SD" para cálculos de desviación estándar.

Mode 7: "FIX" número fijo de dígitos decimales.

Mode 8: "NORM" cancela el modo 7.

Mode 9: "365/360" número de días en el año.

Mode 0: "S/C" modo de interés simple o compuesto.

Las calculadoras financieras presentan, además, capacidades para el cálculo de las siguientes funciones: raíz cuadrada, cuadrado de un número, número

recíproco, potencia, logaritmos vulgar y natural, factorial, parte entera de un número, parte decimal de un número, cálculo del número de días y fecha, desviación estándar, cálculos de regresión, cálculos de interés compuesto, cálculo del número de cuotas, cálculo de tasa de interés, cálculo de cuotas fijas, tasa efectiva, tasa nominal, deuda residual, saldo insoluto, cuota interés, cuota capital, cálculo de valor presente neto, tasa interna de retorno, cálculo de costo, precio de venta, margen de ganancias, memorias, etc.

En la siguiente tabla podemos observar cómo las actuales calculadoras científicas y financieras evalúan la precedencia de las operaciones:

Tabla No. 3

Científicas	Financieras
1. Transformaciones de coordenadas/integración Pol (x,y), Rec (r, q)	1. Financieras (n, i %, PV, PMT, FV, PMT, FV, CST, SEL, MAR, NPV, IRR)
2. Funciones de tipo A: x^2 , x^{-1} , $x!$, a , b , c , símbolos de ENG	2. Funciones de tipo A: x^2 , x^{-1} , $N!$, STO IRR
3. Potencia, radicación	3. Potenciación
4. Fracciones a b/c	4. Pi, memoria, operaciones con paréntesis precedidos por una operación de multiplicación que no usa un símbolo de multiplicación (incluyendo memorias financieras)
5. Formato de multiplicación abreviado en frente de p^x , memoria, o paréntesis.	5. Funciones de tipo B: $\sqrt{}$, log, ln, e^x , (-), Abs, Intg, Frac, PRN, INT, BAL, Σ PRN, Σ INT
6. Funciones de tipo B: $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, log, ln, e^x , 10^x , sin, cos, tan, \sin^{-1} , \cos^{-1} , \tan^{-1} , sinh, cosh, tanh, \sinh^{-1} , \cosh^{-1} , \tanh^{-1} , (-), paréntesis	6. Funciones de tipo B precedido por una operación de multiplicación que no usa símbolo de multiplicación
7. Formato de multiplicación abreviada delante de funciones de tipo B	7. Conversión de interés: \blacktriangleright APR, \blacktriangleright EFF

(continúa)

(continuación)

8. Permutación, combinación	8. Multiplicación usando el símbolo x (por) y división
9. Multiplicación usando el símbolo x (por) y división	9. Adición y sustracción
	10. Operadores de relación: <, >, =, ≠

Una función de tipo A es aquella que para calcularla se ingresa primero el valor y luego se presiona la tecla de función. Una función de tipo de B es aquella que para calcularla se presiona la tecla de función y luego el valor.

12. Listado de fórmulas

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad (1) \quad \text{Enésimo término de una P.A.}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad (2) \quad \text{Suma de una P.A. en función de } a_1 \text{ y } a_n$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d] \quad (3) \quad \text{Suma de una P.A. en función de la razón}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (4) \quad \text{Enésimo término de una P.G.}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \quad (5) \quad \text{Suma de una P.G.}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (6) \quad \text{Suma de una P.G. decreciente}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r} \quad (7) \quad \text{Suma de una P.G. decreciente cuando } n \rightarrow +\infty$$

$$y = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} [x_2 - x_1] \quad (8) \quad \text{Interpolación lineal}$$

13. Problemas propuestos

Progresión aritmética

1. Halle el vigésimo término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión 3, 9, 15,... Rp. 117, 300.
2. En un contrato de trabajo por 36 meses se pacta el pago de un sueldo mensual inicial de S/. 300 con un incremento mensual de S/. 50 a partir del segundo mes y hasta la finalización del contrato. ¿Cuánto habrá acumulado en términos corrientes durante dicho período? Rp. S/. 42 300.
3. En la empresa Texsur, el almacén y los 15 operarios de una línea de producción están ubicados físicamente en una línea recta, separados 8 metros el uno del otro. Si un ayudante debe abastecer desde el almacén -ubicado al inicio de la línea- a cada uno de los 15 operarios y en cada viaje puede entregar la materia prima a uno solo, ¿cuántos km habrá recorrido para abastecer toda la línea de producción? Rp. 1,92 km.
4. La empresa Carso para masificar las ventas de sus computadoras que tienen un precio de venta de \$ 1 400, está planeando introducir al mercado el programa "y dejas de pagar", cuyas características serían: junta de 24 clientes, cada mes se efectuaría un sorteo y el cliente agraciado se adjudicaría la computadora dejando de pagar las cuotas restantes, el número total de sorteos sería de 23. Si la empresa quiere ganar \$ 200 por cada computadora ¿cuánto debe ser el importe de la cuota constante? Rp. \$ 128.

Progresión geométrica

5. Un equipo de procesamiento de datos tiene un precio actual de S/. 10 000 si anualmente el nivel de obsolescencia es del 15% sobre el saldo anterior, ¿cuál será su valor económico al finalizar el décimo año (inicios del undécimo año)? Rp. S/. 1 968,74.
6. Calcule la razón de una P.G. de cuatro términos, si la suma de los dos primeros es 36 y la de los dos últimos es 324. Rp. $r = 3$.

Interpolación

7. La empresa Santa Isabel S.A. tiene en oferta video grabadoras a un precio *cash* de \$ 360, con el sistema de "tarjeta clave" sus clientes pueden adquirirlas sin cuota inicial y con 4 cuotas mensuales vencidas

- de \$ 100 c/u. ¿Cuál es la tasa efectiva mensual de interés cargada en el financiamiento? Rp. 4,35%.
8. La empresa Clan S.A., por campaña de navidad, ofrece los radios de doble casetera a un precio *cash* de \$ 100. Al crédito se puede adquirir con una cuota inicial de \$ 40 y con 4 cuotas mensuales de \$ 20 c/u. ¿Cuál es la tasa efectiva mensual de interés cargada en el financiamiento? Rp. 12,59%.
9. La empresa Hogar, por el día de la madre, está ofertando "el regalo perfecto para la mamá": un TV a color JVC 14" Master Command III con sintonizador compatible con cable de 180 canales, memoria de estado de AV para 2 ajustes de sintonía fina. El precio financiado es: \$ 89 de cuota inicial y seis letras mensuales de \$ 59. Si el mismo TV puede adquirirse al contado en \$ 370 ¿cuál es la tasa mensual cargada en el financiamiento? Rp. 7,02%.

14. Resumen del capítulo

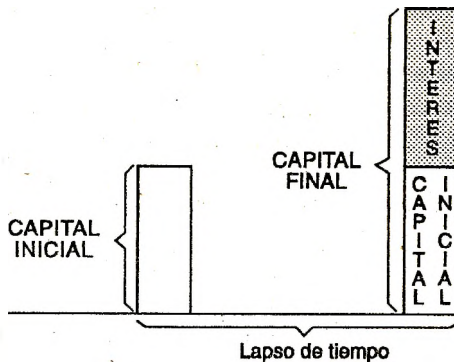
En este primer capítulo se han desarrollado los fundamentos matemáticos básicos para efectuar el conjunto de cálculos financieros de los próximos capítulos. La potenciación y radicación son necesarias en las operaciones a interés compuesto, aunque generalmente se utilizará la potenciación empleando exponente fraccionario en vez de radicar, debido a su gran facilidad para realizar directamente estas operaciones en cualquier máquina calculadora. Los logaritmos serán utilizados en el cálculo del tiempo en operaciones financieras a interés compuesto y anualidades. Las posteriores demostraciones de valor futuro y valor presente de series uniformes de rentas y anualidades que desarrollaremos en el presente libro se basan en progresiones geométricas. Asimismo, el cálculo de la tasa implícita o tasa de retorno y aproximaciones para calcular el tiempo hacen necesarios el dominio de la interpolación. El manejo de una calculadora que eleve a exponente fraccionario es necesario para facilitar el conjunto de cálculos en las operaciones financieras. Para estos efectos se ha presentado un grupo de operaciones orientadas no sólo al conocimiento del manejo de la calculadora que posea cada lector sino a su completo dominio especialmente en lo que se refiere a la utilización de memorias, funciones inversas y los diversos modos en que pueden operar dichas máquinas. El flujo de caja, evaluado como ingresos y desembolsos de efectivo, nos permitirá representar las diferentes variables que intervienen en las evaluaciones a interés simple y compuesto.

II

Interés simple

Introducción

El interés es la diferencia que existe entre un monto o capital final y el importe original que lo produjo.



El precio a pagar por disponer de un capital, denominado interés, depende en gran medida de los siguientes factores:

- Del beneficio económico o social a obtener con la utilización de dicho capital.

- Del tiempo de la operación, a mayor tiempo mayor interés aunque la tasa de interés permanezca invariable.
- De la seguridad sobre el buen fin de la inversión, y del respaldo de la persona que solicita el crédito: Se supone que a mayor riesgo debe corresponder una mayor tasa de interés y viceversa.
- De la situación del mercado de dinero. Una mayor demanda sobre la oferta presionará a un incremento de la tasa de interés, o a elegir entre aquellos demandantes de capital que presenten un menor riesgo potencial.
- De otras variables de carácter económico, político, social, etc.

En consecuencia, el interés es función del capital, de la tasa de interés, del tiempo, del riesgo inherente a la operación y de otras variables económicas, políticas y sociales:

$$I = f(\text{capital, tasa, tiempo, riesgo, etc.})$$

El *capital* puede estar dado en moneda nacional o moneda extranjera. La *tasa* de interés simple se suele expresar en tanto por ciento (%) y trabajarse en las fórmulas financieras en tanto por uno. El *tiempo* está referido al plazo total de la operación. El *riesgo* es la medida de la incertidumbre de que el deudor honre al acreedor su compromiso al vencimiento del plazo pactado, el precio del riesgo se incluye en el costo del dinero: la tasa de interés.

1. Cálculo del interés simple

En una operación de *interés simple* el capital que genera los intereses permanece constante durante el tiempo de vigencia de la transacción. La *capitalización*, que es la adición del interés ganado al capital original, se produce únicamente al término de la operación.

Simbología

I	Interés
P	Principal, capital o stock inicial de efectivo, valor presente.
S	Monto, capital o stock final de efectivo, valor futuro.
n	Número de períodos de tiempo (días, meses, trimestres, etc).
i	Tasa de interés simple por unidad de tiempo, expresado en tanto por uno.

Fórmula general

Para deducir una fórmula que calcule el interés simple consideremos un préstamo de S/. 1 000 cobrando una tasa de interés simple del 24% anual ($24/100 = 0,24$) aplicable *exclusivamente sobre el capital original*.

Al final del primer año el interés generado por el *capital inicial* será:

$$\text{Interés} = 1\,000 \times 0,24 \times 1 = 240$$

Al final del segundo año el total de intereses generado por el *capital inicial* será:

$$\text{Interés} = 1\,000 \times 0,24 \times 2 = 480$$

Al final del n -ésimo año el total de intereses generado por el *capital inicial* será:

$$\text{Interés} = 1\,000 \times 0,24 \times n$$

De acuerdo con nuestra simbología, la ecuación anterior puede generalizarse:

$$I = Pin \quad (9)$$

En esta fórmula i es la tasa de una unidad de tiempo y n es el número de unidades de tiempo. Debe entenderse que si i es una tasa anual, n es el número de años. Del mismo modo si i es una tasa mensual, n es el número de meses y así sucesivamente para otras unidades de tiempo.

De (9) obtenemos:

$$P = \frac{I}{in} \quad (10) \quad i = \frac{I}{Pn} \quad (11) \quad n = \frac{I}{Pi} \quad (12)$$

Ejemplo 1.- Un Banco otorgó a una empresa un préstamo de S/. 10 000 para devolverlo dentro de un año, cobrando una tasa de interés simple del 24% anual. ¿Cuál será el interés que pagará la empresa al vencimiento del plazo?

Solución

$$I = 10\,000 \times 0,24 \times 1 = \text{S/. } 2\,400$$

Si la tasa y el tiempo de la operación están referidas a diferentes unidades de tiempo, como por ejemplo tasa anual y tiempo en días, entonces debemos homogenizar ambas variables para expresarlas en años ó días respectivamente.

Ejemplo 2.- ¿Cuál será el interés acumulado en 180 días por un depósito de ahorro de S/. 1 000 percibiendo una tasa de interés simple del 24% anual?

Solución

a) Homogenizando **i** y **n** a días (Tasa y tiempo diarios)

$$I = 1\,000 \times 0,24/360 \times 180 = 120$$

b) Homogenizando **i** y **n** a años (Tasa y tiempos anuales)

$$I = 1\,000 \times 0,24 \times 180/360 = 120$$

Ejemplo 3.- Una persona deposita S/. 10 000 en una institución financiera ganando una tasa de interés simple del 5% mensual. ¿Qué interés habrá acumulado en tres meses?

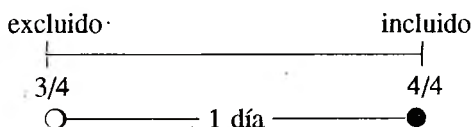
Solución

$$I = 10\,000 \times 0,05 \times 3 = 1\,500$$

1.1 Período de tiempo comprendido entre dos fechas

De acuerdo al sistema legal vigente, si una persona deposita y retira de su cuenta en un banco una determinada cantidad de dinero en el mismo día, no habrá ganado interés alguno. Lo contrario supondría percibir interés por horas, minutos, segundos etc. situación que puede corresponder al cálculo del interés continuo y no contemplada en el sistema financiero. Para percibir interés es necesario que el dinero haya permanecido en la institución financiera como mínimo un día, transcurrido entre dos fechas consecutivas, la primera de las cuales se excluye y la última se incluye, operación conocida como el "método de los días terminales". Por ejemplo, un depósito efectuado el 3 de abril y

retirado el 4 del mismo mes habrá percibido interés correspondiente a un día, contado del 3 al 4.



En el cálculo del período de tiempo comprendido entre dos fechas, para excluir el primer día podemos efectuar lo siguiente:

- Depósitos y retiros producidos en el propio mes: restar al día de retiro el día de depósito. Por ejemplo, para un depósito del 3 de abril, retirado el 26 del mismo mes, se contabilizará 23 días ($26 - 3 = 23$).
- Depósitos y retiros producidos en períodos que incluyen más de un mes: restar al número de días del primer mes los días transcurridos desde que se efectuó el depósito (incluido ese día) y adicionar los días de los meses siguientes incluyendo el día de retiro. Por ejemplo para un depósito del 26 de mayo, retirado el 7 de junio, se contabilizarán 12 días (5 en mayo y 7 en junio).

Ejemplo 4.- ¿Cuántos días de interés se habrán acumulado entre el 3 de junio y el 18 de setiembre del mismo año, fechas de depósito y cancelación de un importe ahorrado en un banco?

Solución

Mes	Días	Días transcurridos en el mes
Junio	30	27 excluye el 3 de junio ($30 - 3 = 27$)
Julio	31	31 incluye los 31 días
Agosto	31	31 incluye los 31 días
Setiembre	30	18 incluye el 18 de setiembre
		107 días

1.2 Año bancario según BCRP

De acuerdo a lo normado por el Banco Central de Reserva del Perú, *el año bancario* es un período de 360 días. En el presente libro el adjetivo *anual* y el

término *año* cuando no estén asociados a fechas específicas, harán referencia a un año bancario. En general los siguientes términos harán referencia a los siguientes períodos de tiempo:

Término	Período en días
Año	360
Semestre	180
Cuatrimestre	120
Trimestre	90
Bimestre	60
Mes	30
Quincena	15
Día	1

Número de unidades de tiempo en un año bancario

Unidad	Número
Año	1
Semestre	2
Cuatrimestre	3
Trimestre	4
Bimestre	6
Mes	12
Quincena	24
Día	360

Ejemplo 5.- Si la tasa anual de interés simple es del 18% anual. ¿Cuál será la tasa para el período comprendido entre el 1 de enero de 1995 y el 1 de enero de 1996?

Solución

Entre las fechas referidas han transcurrido 365 días. Por regla de tres simple:

$$\begin{array}{rcl} 18\% & \text{-----} & 360 \text{ días} \\ x\% & \text{-----} & 365 \text{ días} \end{array}$$

$$x = 18.25\%$$

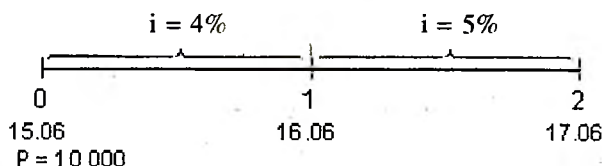
Ejemplo 6.- El interés simple de un capital inicial de S/. 1 000 colocado durante un año a una tasa del 24% anual puede calcularse alternativamente con diferentes tiempos y tasas proporcionales.

Solución

Años	$I = 1\,000 \times 0,24 \times 1 = 240$
Semestres	$I = 1\,000 \times 0,12 \times 2 = 240$
Cuatrimestres	$I = 1\,000 \times 0,08 \times 3 = 240$
Trimestres	$I = 1\,000 \times 0,06 \times 4 = 240$
Bimestres	$I = 1\,000 \times 0,04 \times 6 = 240$
Meses	$I = 1\,000 \times 0,02 \times 12 = 240$
Quincenas	$I = 1\,000 \times 0,01 \times 24 = 240$
Días	$I = 1\,000 \times 0,0006 \times 360 = 240$

1.3 Inclusión y exclusión de días cuando se producen variaciones de tasas

¿Cómo debe calcularse el interés cuando se producen variaciones de tasas? Supongamos que el 15 de junio, cuando la tasa de interés simple mensual fue 4%, una persona depositó en su cuenta de ahorros S/. 10 000 y los retiró el 16 de junio, fecha en que la tasa subió a 5%. ¿Qué tasa de interés debe aplicarse al depósito?



En el gráfico observamos que del 15 al 16 de junio la persona ganó un día de interés a la tasa del 4%. La percepción de la tasa del 5% corresponderá a los depósitos efectuados a partir del día 16 de abril.

Ejemplo 7.- Calcule el interés simple de un capital de S/. 5 000 colocado en una institución financiera desde el 3 de marzo al 15 de mayo del mismo año, a una tasa del 2% mensual.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 I = ? & I = Pin \\
 P = 5\,000 & I = 5\,000 \times 0,02 \times 73/30 \\
 i = 0,02 & I = 243,33 \\
 n = 73 \text{ días} &
 \end{array}$$

Ejemplo 8.- ¿Qué capital colocado a una tasa anual del 30% producirá un interés simple de S/. 1 000 en el período comprendido entre el 19 de abril y 30 de junio?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 P = ? & P = I/(in) \\
 I = 1\,000 & P = 1\,000/(0,30 \times 72/360) \\
 i = 0,30 & P = 16\,666,67 \\
 n = 72 \text{ días} &
 \end{array}$$

Ejemplo 9.- ¿Cuál será la tasa mensual de interés simple a cargar en el financiamiento a 45 días, sobre un artículo cuyo precio de contado es de S/. 2 000 y al crédito sin cuota inicial será de S/. 2 300?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 i = ? & i = I/(Pn) \\
 I = 300 & i = 300/(2\,000 \times 45/30) \\
 P = 2\,000 & i = 0,10 = 10\% \\
 n = 45 \text{ días} &
 \end{array}$$

Ejemplo 10.- ¿En cuánto tiempo podrá duplicarse un capital a una tasa de interés simple del 5% mensual?

Solución

Un capital se duplica cuando el interés ganado iguala al capital inicial. Asumiendo un capital de S/. 1 tenemos:

$$\begin{array}{ll}
 n = ? & n = I/(Pi) \\
 I = 1 & n = 1/0,05 \\
 P = 1 & n = 20 \\
 i = 0,05 &
 \end{array}$$

Habiendo ingresado i mensual el resultado hallado para n es mensual.

1.4 Variaciones en la tasa de interés

Cuando en el mercado se producen variaciones de tasas, la fórmula (9) debe modificarse para incluir dichas variaciones durante los períodos de tiempo de vigencia de la tasa.

Siendo $i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_m$ las tasas de interés vigentes durante $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_m$ períodos respectivamente, tenemos:

$$I = P i_1 n_1 + P i_2 n_2 + P i_3 n_3 + P i_4 n_4 + \dots + P i_m n_m$$

$$I = P [i_1 n_1 + i_2 n_2 + i_3 n_3 + i_4 n_4 + \dots + i_m n_m]$$

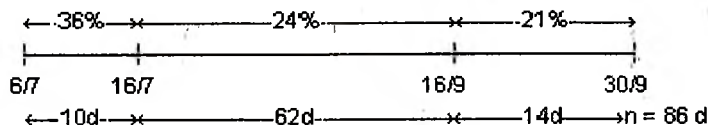
$$I = P \sum_{k=1}^m i_k n_k \quad (13)$$

La fórmula (13) calcula el interés simple con variaciones de tasa.

Ejemplo 11.- Calcular: a) el interés simple de un depósito de ahorro de S/. 5 000 colocado en el Banco Norte del 6 de julio al 30 de setiembre del mismo año ganando una tasa anual de interés simple del 36%. La tasa anual bajó al 24% a partir del 16 de julio y al 21% a partir del 16 de setiembre; b) Con la misma información calcule nuevamente el interés, considerando que el banco abona los intereses en la libreta de ahorros cada fin de mes (capitalización).

Solución

a) Interés simple del 6 de julio al 30 de setiembre



Variación de tasas

A partir de	i		Días		Acum.
6 julio		36 %		10	10
16 julio	i_1	24 %	n_1	62	72
16 setiembre	i_2	21 %	n_2	14	86
30 setiembre	i_3		n_3		

Cálculo del interés simple del 6 de julio al 30 de setiembre

$$I = 5\,000 [(0,36 \times 10/360) + (0,24 \times 62/360) + (0,21 \times 14/360)]$$

$$I = 5\,000 [0,0595] = 297,5$$

- b) Interés simple del 6 de julio al 30 de setiembre con abono de interés cada fin de mes

Cuando los intereses simples se abonan mensualmente como lo hacen los bancos para los depósitos de ahorros, éstos se capitalizan y sobre los nuevos capitales se calculan nuevamente los intereses simples.

Julio $I = 5\,000 [0,36 \times 10/360 + 0,24 \times 15/360] = 100$

Agosto $I = 5\,100 [0,24 \times 31/360] = 105,40$

Setiembre $I = 5\,205,4 [0,24 \times 16/360 + 0,21 \times 14/360] = 98,04$

$$\text{Interés total} = 100 + 105,40 + 98,04 = 303,44$$

Variación de tasas

A partir de	i	Días
6 de julio	36%	10
16 de julio	24%	15
31 de julio	24%	31
31 de agosto	24%	16
16 de setiembre	21%	14
30 de setiembre		86

El conjunto de estas operaciones a interés simple constituye una de interés compuesto.

1.5 Variaciones en el principal (numerales)

Cuando el saldo de una cuenta corriente, de ahorro, etc. cambia constantemente debido a los movimientos que se generan en torno a ella (cargos y abonos), el

cálculo del interés simple se efectúa usando *numerales*. *Numeral* es el producto de cada nuevo saldo de una cuenta y el número de días de permanencia de ese saldo sin movimiento. A una fecha determinada (fin de mes, trimestre, etc.) se obtiene el interés simple multiplicando la sumatoria de los numerales por la tasa diaria de interés.

La siguiente ecuación muestra el movimiento de una cuenta de ahorros durante un período de tiempo:

$$I = P_1 in_1 + P_2 in_2 + P_3 in_3 + \dots + P_m in_m \quad (1)$$

Cada sumando de la expresión anterior representa una operación de interés simple, donde:

P_1, P_2, P_3, \dots son los saldos del capital original.

n_1, n_2, n_3, \dots son los días de permanencia de los saldos P_1, P_2, P_3, \dots

De (1):

$$I = i [P_1 n_1 + P_2 n_2 + P_3 n_3 + P_4 n_4 + \dots + P_m n_m]$$

Cada sumando de la expresión entre corchetes es un *numeral*.

$$I = i \sum_{k=1}^m P_k n_k \quad (14)$$

La fórmula (14) calcula el interés simple aplicando numerales.

Ejemplo 12.- Una persona abre una libreta de ahorros el 1 de junio con S/. 1 100 y efectúa a partir de esa fecha durante todo el mes de junio las operaciones detalladas en el cuadro siguiente. ¿Qué interés habrá acumulado al 1 de julio, si la tasa mensual de interés simple fue del 4%?

Depósitos		Retiros	
1 junio	1 100	4 junio	150
6 junio	200	18 junio	300
10 junio	100	27 junio	630
23 junio	60		
26 junio	480		
28 junio	100		

Solución

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 1\,100 & n_1 &= 3 & I &= 0,04/30 [(1\,100 \times 3) + (950 \times 2) + (1\,150 \times 4) + \\
 P_2 &= 950 & n_2 &= 2 & & (1\,250 \times 8) + (950 \times 5) + (1\,010 \times 3) + \\
 P_3 &= 1\,150 & n_3 &= 4 & & (1\,490 \times 1) + (860 \times 1) + (960 \times 3) \\
 P_4 &= 1\,250 & n_4 &= 8 & & \\
 P_5 &= 950 & n_5 &= 5 & I &= 0,04/30 [32\,810] \\
 P_6 &= 1\,010 & n_6 &= 3 & I &= 0,001333333 \times 32810 \\
 P_7 &= 1\,490 & n_7 &= 1 & I &= 43,75 \\
 P_8 &= 860 & n_8 &= 1 & & \\
 P_9 &= 960 & n_9 &= 3 & &
 \end{aligned}$$

Cálculo del interés simple a través de numerales

Día	D/R	Importe	Movimiento		Saldo acreedor	Días	Numerales acreedores
			Debe	Haber			
01.06	D	1 100,0	0,0	1 100,0	1 100,0	3	3 300
04.06	R	150,0	150,0	0,0	950,0	2	1 900
06.06	D	200,0	0,0	200,0	1 150,0	4	4 600
10.06	D	100,0	0,0	100,0	1 250,0	8	10 000
18.06	R	300,0	300,0	0,0	950,0	5	4 750
23.06	D	60,0	0,0	60,0	1 010,0	3	3 030
26.06	D	480,0	0,0	480,0	1 490,0	1	1 490
27.06	R	630,0	630,0	0,0	860,0	1	860
28.06	D	100,0	0,0	100,0	960,0	3	2 880
01.07	Totales					30	32 810
Multiplicador fijo $0,04/30 \times 32810 = 43,75$							
01.07	I	43,75	0,0	43,75	1 003,75		

D = depósito; R = retiro; I = interés

Procedimiento bancario de cálculo del interés simple a través de numerales

- 1) Registramos los depósitos o retiros de ahorros, abonando o cargando respectivamente en la columna *Movimiento* y establecemos los saldos acreedores de acuerdo a las fechas en que se hayan efectuado estos movimientos.
- 2) Registramos los días de permanencia de la cuenta con el último movimiento. Por ejemplo, el saldo inicial acreedor de S/. 1 100 ha permanecido tres días con dicho importe, desde el 1 al 3 de junio inclusive, ya que a partir del día 4 la cuenta registra un nuevo saldo acreedor de S/. 950.
- 3) Calculamos los numerales: multiplicando los saldos acreedores P_k por los días n_k que la cuenta ha permanecido con ese saldo, y obtenemos la sumatoria de las operaciones acumuladas durante el mes, incluyendo el último día del mes, esta cantidad así obtenida de S/. 32 810 viene a representar los *numerales* que servirán para el cálculo del interés.
- 4) Hallamos el interés del mes, multiplicando la tasa diaria por los numerales acreedores:

$$\text{Interés} = (0,04/30) (32\ 810) = 43,75$$

El importe de S/. 43,75 es el interés ganado por el ahorrista durante el mes de junio y está disponible a partir del primer día útil del mes siguiente.

Cuando la institución financiera abona los intereses del mes en la libreta de ahorros como el desarrollado en el presente ejemplo, se está produciendo el proceso de capitalización, combinándose el interés simple con el interés compuesto.

1.6 Numerales con variaciones de tasas

Cuando existen variaciones de tasas, el cálculo del interés simple a través de numerales debe efectuarse por tramos durante los períodos de tiempo que la tasa tuvo vigencia. Se muestra su aplicación a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 13.- El 1 de setiembre cuando la tasa mensual era de 3%, una persona abrió una libreta de ahorros con un importe de S/. 2 000 y a partir de esa fecha

efectuó los siguientes depósitos: S/. 500, 300, y 400 el 6, 9 y 20 de setiembre; asimismo retiró: S/. 600 y 200 el 6 y 25 del mismo mes. Si la tasa bajó al 2% a partir del 16 de setiembre y la entidad financiera abona los intereses simples en la cuenta de ahorros el primer día del mes siguiente, ¿cuál es el importe disponible del cliente el 1 de octubre?

Solución

Cálculo de interés simple con variación de tasas a través de numerales

Día	D R I	Importe	Movimiento		Saldo acreedor	Días	Numerales acreedores	Tasa diaria	Interés
			Debe	Haber					
01.09	D	2 000	0	2 000	2 000	5	10 000	0,00100	10,00
06.09	D	500	0	500	2 500	0	0	0,00100	0,00
06.09	R	600	600	0	1 900	3	5 700	0,00100	5,70
09.09	D	300	0	300	2 200	7	15 400	0,00100	15,40
16.09	C	0	0	0	2 200	4	8 800	0,00066	5,87
20.09	D	400	0	400	2 600	5	13 000	0,00066	8,67
25.09	R	200	200	0	2 400	6	14 400	0,00066	9,60
01.10	Totales					30			55,24
01.10	I	55,24	0,0	55,24	2 455,24				

D = depósito; R = retiro; I = interés; C =cambio de tasa

2. Monto, capital o stock final, valor futuro

El monto o importe capitalizado constituye la suma del capital inicial e interés.

$$S = P + I \quad (15)$$

$$S = P + Pin$$

$$S = P (1 + in) \quad (16)$$

En esta fórmula la tasa de interés y el tiempo se refieren a una misma unidad de tiempo y $(1 + in)$ es el *factor simple de capitalización a interés simple*.

De la ecuación (16) despejamos i y n :

$$i = \frac{S/P - 1}{n} \quad (17) \quad n = \frac{S/P - 1}{i} \quad (18)$$

Ejemplo 14.- ¿Qué monto habrá acumulado una persona en una cuenta de ahorros, del 4 al 16 de octubre a una tasa de interés simple del 3% mensual, si el depósito inicial fue de S/. 2 500?

Solución

$$\begin{array}{ll} S = ? & S = P (1 + in) \\ P = 2\,500 & S = 2\,500 (1 + 0,03 \times 12/30) \\ i = 0,03 & S = 2\,500 (1,012) \\ n = 12/30 & S = 2\,530 \end{array}$$

Ejemplo 15.- Una máquina cuyo precio de contado es de S/. 6 000 fue adquirida con una cuota inicial de S/. 2 000 y el saldo financiado con una letra a 45 días por el importe de S/. 4 500. ¿Cuál fue la tasa mensual de interés simple cargada?

Solución

Si la máquina tiene un precio de contado de S/. 6 000 y se paga una cuota inicial de S/. 2 000, entonces el financiamiento neto P es S/. 4 000, sobre el cual se exige un monto de S/. 4 500.

$$\begin{array}{ll} i = ? & i = \frac{S/P - 1}{n} \\ P = 4\,000 & i = \frac{4\,500/4\,000 - 1}{45/30} = 0,0833 \\ S = 4\,500 & \\ n = 45/30 & \end{array}$$

Ejemplo 16.- ¿En qué tiempo se podrá triplicar un capital a una tasa anual de interés simple del 60%?

Solución

$$n = ?$$

$$S = 3$$

$$P = 1$$

$$i = 0,6$$

$$n = \frac{S/P - 1}{i} \quad n = \frac{3/1 - 1}{0,6} = 3,33333$$

El resultado obtenido está dado en años porque hemos trabajado con una tasa anual. Si dicho resultado quisiéramos expresarlo en meses, días etc, lo tendríamos que multiplicar por 12, 360 ó por los períodos de tiempo contenidos en un año. Por lo tanto, respuestas equivalentes serían 40 meses ($3,333333 \times 12$); 80 quincenas ($3,333333 \times 24$); 1 200 días ($3,333333 \times 360$); y así sucesivamente.

2.1 Monto con variaciones de tasa

Cuando se producen variaciones de tasa, aplicamos la siguiente fórmula:

$$S = P [1 + (i_1 n_1 + i_2 n_2 + i_3 n_3 + \dots + i_m n_m)] \quad (19)$$

Ejemplo 17.- Un préstamo de S/. 2 000 fue pactado para ser devuelto dentro de 4 meses conjuntamente con los intereses simples generados por el capital original y calculados con la tasa de inflación mensual más un punto adicional. Al final del plazo la inflación fue del 2% y 2,5% para el primer y segundo mes y del 2,2% para los últimos dos meses. Calcule el monto de esa operación.

Solución

$$S = ?$$

$$P = 2\,000$$

$$i_1 = 0,03 \quad n_1 = 1$$

$$i_2 = 0,035 \quad n_2 = 1$$

$$i_3 = 0,032 \quad n_3 = 2$$

$$S = P [1 + (i_1 n_1 + i_2 n_2 + i_3 n_3)]$$

$$S = 2\,000 [(1 + 0,03 \times 1 + 0,035 \times 1 + 0,032 \times 2)]$$

$$S = 2\,000 [1 + 0,129]$$

$$S = 2\,258$$

3. Principal, capital inicial, valor presente

El valor presente P, de un importe con vencimiento en una fecha futura, es aquel principal que a una tasa dada alcanzará en el período de tiempo contado

hasta la fecha de vencimiento, un importe igual a su valor futuro. Se obtiene despejando (P) en (16)

$$P = S \left[\frac{1}{1 + in} \right] \quad (20)$$

En esta fórmula la tasa de interés y el tiempo están expresadas en la misma unidad de tiempo y $1/(1 + in)$ es el *factor simple de actualización a interés simple*.

Ejemplo 18.- Encontrar el capital que impuesto a una tasa de interés simple mensual del 3% durante 87 días, ha producido un monto de S/. 500.

Solución

$P = ?$

$i = 0,03$

$n = 87/30$

$S = 500$

$$P = S \left[\frac{1}{1 + in} \right]$$

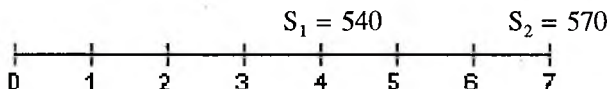
$$P = \frac{500}{1 + (0,03 \times 87/30)} = 459,98$$

4. Ecuaciones de valor equivalente a interés simple

Dos o más importes de dinero ubicados en diferentes momentos de tiempo son equivalentes cuando sus valores presentes calculados con una misma tasa de interés, son iguales. Si dichos importes coinciden cronológicamente y están expresados en la misma unidad monetaria, entonces, en ese punto del tiempo podrán sumarse o restarse. En el interés simple, si dos importes son equivalentes en el presente, no necesariamente son equivalentes en otro momento, tal como sí ocurre con el interés compuesto.

Ejemplo 19.- Determinar si los importes de S/. 540 y 570 al final de los meses 4 y 7 respectivamente son equivalentes en el presente. Utilice una tasa de interés simple anual del 24%.

Solución



$$P = 540 / (1 + 0,02 \times 4) = 500$$

$$P = 570 / (1 + 0,02 \times 7) = 500$$

S_1 y S_2 son equivalentes en el momento 0 porque sus valores futuros descontados a la tasa de interés simple del 24% anual originan un mismo valor presente de S/. 500.

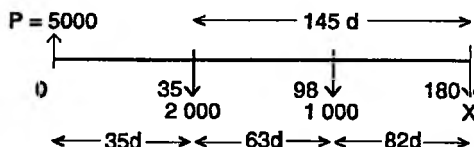
En las operaciones mercantiles, suelen presentarse situaciones en las cuales deudores y acreedores -por convenir a sus intereses- se ponen de acuerdo en cambiar las condiciones pactadas originalmente, generando nuevas relaciones contractuales, tal como sucede en:

- Refinanciación de deudas.
- Sustitución de varias deudas que vencen en fechas diferentes, por un solo pago.
- Pagos adelantados en relación a una o varias fechas de vencimiento.
- Prórrogas de vencimientos de plazos pactados, etc.

Para el cálculo de equivalencias de capitales a interés simple es necesario fijar una *fecha focal* (fecha de evaluación) y plantear una ecuación de equivalencia donde se pongan en igualdad las condiciones originales y las nuevas condiciones, y luego despejar la incógnita planteada.

Ejemplo 20.- El señor Silva tomó en préstamo S/. 5 000 para devolverlos dentro de 180 días pagando una tasa de interés simple mensual del 2,5%. Si durante dicho período paga S/. 2 000 el día 35 y 1 000 el día 98, ¿cuánto deberá pagar el día 180 para cancelar su deuda: a) procesando los abonos el mismo día; b) tomando como fecha focal el día 180?

Solución

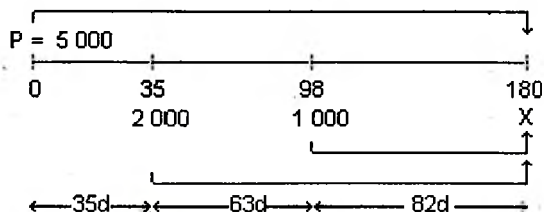


a) Procesando los abonos el mismo día del pago

Día	Valor futuro	Abono	Saldo
35	$S_{35} = 5\,000,00 [1 + 0,025 \times 35/30] = 5\,145,83$	2 000,00	3 145,83
98	$S_{98} = 3\,145,83 [1 + 0,025 \times 63/30] = 3\,310,99$	1 000,00	2 310,99
180	$S_{180} = 2\,310,99 [1 + 0,025 \times 82/30] = 2\,468,91$	2 468,91	0,00
	Total	5 468,91	

Con esta metodología se capitaliza el interés simple hasta el día del primer abono anticipado, reduciendo la deuda en dicho importe y sobre el nuevo saldo se vuelve a capitalizar hasta la fecha del nuevo abono y así sucesivamente hasta el término de la operación; sin embargo, este procedimiento no es correcto porque la capitalización simple (adición del interés al principal), debe efectuarse únicamente al final del plazo pactado; cualquier capitalización anticipada produce un incremento de la tasa simple anunciada.

b) Ecuación de valor equivalente tomando como fecha focal el día 180



Establecemos una ecuación de valor equivalente en el día 180, capitalizando la deuda original e igualándola con la suma de los pagos parciales capitalizados y el importe X a calcular.

$$\begin{aligned}
 5000 [1 + 0,025 \times 180/30] &= 2000 [1 + 0,025 \times 145/30] + 1000 [1 + 0,025 \times 82/30] + X \\
 5750 &= 3309,99 + X \\
 X &= 2440,00
 \end{aligned}$$

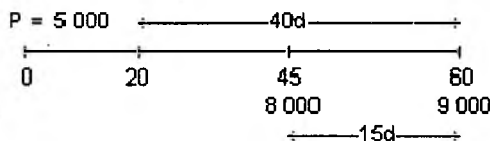
Total de pagos efectuados: $2\,000 + 1\,000 + 2\,440 = 5\,440$

Puede notarse la diferencia entre el método a) que arroja un pago total de S/. 5 468,91 y el método b) que arroja el importe de S/. 5 440.

Ejemplo 21.- En la fecha, la empresa El Sol S.A. tiene 3 deudas con el Banco del Oriente por S/. 5 000, 8 000 y 9 000 las cuales vencen dentro de 20, 45 y 60 días respectivamente. Si el Sol negocia con su banco efectuar un pago único de S/. 22 000 ¿en qué fecha debe efectuarlo considerando una tasa anual de interés simple del 24%?

Solución

Para el desarrollo del presente problema es necesario efectuar la equivalencia en la fecha del último vencimiento. Con los presentes datos la equivalencia se efectuará en el día 60.



$$\begin{aligned}
 5\,000 [1 + 0,24 \times 40/360] + 8\,000 [1 + 0,24 \times 15/360] + 9\,000 &= 22\,000 [1 + 0,24/360 \times n] \\
 22\,213,33 &= 22\,000 + 14,66666n \\
 n &= 14,54
 \end{aligned}$$

Con el pago de S/. 22 000 la deuda total quedará cancelada 15 días antes del día 60.

5. Problemas resueltos

1. Calcule el interés simple que ha producido un capital de S/. 10 000 colocado a una tasa anual del 48% durante el período comprendido entre el 3 de abril y 3 de junio del mismo año.

Solución

- a) Cálculo de los días

abril = 27; mayo = 31; junio = 3; Total 61 días

- b) Cálculo del interés

$$I = 10\,000 \times 0,48 \times 61/360 = 813,33$$

2. Con los datos del problema 1 calcule el interés simple aplicando una tasa mensual del 4%.

Solución

- a) Interés trabajando en meses

$$I = 10\,000 \times 0,04 \times 61/30 = 813,33$$

- b) Interés trabajando en días

$$I = 10\,000 \times 0,04/30 \times 61 = 813,33$$

3. ¿Qué capital colocado al 36% anual, ha producido S/. 500 de interés simple al término de 18 semanas?

Solución

$$P = ?$$

$$P = I/in$$

$$i = 0,36$$

$$P = 500/(0,36 \times 126/360)$$

$$I = 500$$

$$P = 3\,968,25$$

$$n = 18 \times 7 = 126 \text{ días}$$

4. ¿Cuál será el capital que habrá producido un interés simple de S/. 800 al 12% semestral en 7 trimestres?

Solución

$$P = ?$$

$$P = I/in$$

$$I = 800$$

$$P = 800/(0,12 \times 7/2)$$

$$i = 0,12$$

$$P = 1\,904,76$$

$$n = 7/2 \text{ semestres}$$

5. ¿Cuál es la tasa anual de interés simple aplicada para que un capital de S/. 8 000 colocado a 1 año, 3 meses y 18 días haya ganado S/. 6 000 de interés?

Solución

$$\begin{array}{ll} i = ? & i = I/Pn \\ P = 8\,000 & i = 6\,000 / (8\,000 \times 468/360) \\ n = 468 \text{ días} & i = 0,5769 \\ I = 600 & i = 57,69\% \end{array}$$

6. Un capital de S/. 15 000 ha producido S/. 2 000 de interés del 3 de marzo al 19 de junio del mismo año. Determinar la tasa mensual de interés simple.

Solución

$$\begin{array}{ll} i = ? & i = I/Pn \\ P = 15\,000 & i = 2\,000 / (15\,000 \times 108/30) \\ I = 2\,000 & i = 0,03703 \\ n = 108 \text{ días} & i = 3,703\% \end{array}$$

7. Un capital de S/. 5 000 se ha incrementado en 15% por razón de interés simple al 30% anual. Halle el tiempo en días.

Solución

$$\begin{array}{ll} n = ? & n = I/Pi \\ P = 5\,000 & n = 750 / (5\,000 \times 0,30/360) \\ I = 750 & n = 180 \text{ días} \\ i = 0,30 & \end{array}$$

8. Un capital de S/. 6 000 ha producido S/. 500 de interés simple al 12,5% anual. Determine el tiempo de la operación.

Solución

$$\begin{array}{ll} n = ? & n = I/Pi \\ P = 6\,000 & n = 500 / (6\,000 \times 0,125) \\ I = 500 & n = 0,666666 \text{ años} \\ i = 0,125 & n = 0,666666 \times 360 = 240 \text{ días} \end{array}$$

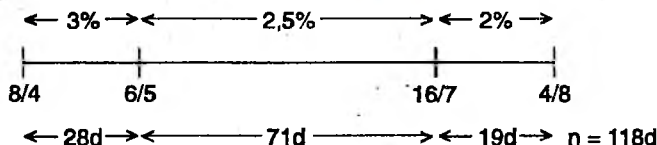
- 9.- Calcule el interés simple de una inversión de S/. 5 000 colocada a 2 meses, si en el primer mes la tasa anual fue del 12% y durante el segundo mes fue del 10%.

Solución

$$\begin{aligned}
 I &= ? & I &= P [i_1 n_1 + i_2 n_2] \\
 P &= 5\,000 & I &= 5\,000 [0,12/12 + 0,1/12] \\
 i_1 &= 0,12 \quad n_1 = 1 & I &= 91,67 \\
 i_2 &= 0,10 \quad n_2 = 1
 \end{aligned}$$

10. El 8 de abril cuando la tasa mensual era del 3% una empresa invirtió un capital de S/. 2 000, el cual retiró el 4 de agosto del mismo año. Calcule el interés simple si durante dicho período las tasas mensuales cambiaron al 2,5% el 6 de mayo y al 2% el 16 de julio respectivamente.

Solución



Variación de tasas

$$P = 2\,000$$

$$i_1 = 0,03 \quad n_1 = 28$$

$$i_2 = 0,025 \quad n_2 = 71$$

$$i_3 = 0,02 \quad n_3 = 19$$

A partir de	i	Días
8 de abril	3,0%	28
6 de mayo	2,5%	71
16 de julio	2,0%	19
4 de agosto		118

$$\begin{aligned}
 I &= P [i_1 n_1 + i_2 n_2 + i_3 n_3] \\
 I &= 2\,000 [(0,03 \times 28/30) + (0,025 \times 71/30) + (0,02 \times 19/30)] \\
 I &= 2\,000 \times 0,09983333334 \\
 I &= 199,67
 \end{aligned}$$

11. Carlos, Eduardo y Antonio constituyeron una SRL el 11 de julio, con un capital suscrito de \$ 15 000, de los cuales se pagó \$ 9 000 en la fecha de inicio de la sociedad. El saldo se cubrió en las siguientes fechas:

Fecha	Carlos	Eduardo	Antonio	Total
11-07	3 000	2 000	4 000	9 000
23-08	1 000	2 000	0	3 000
15-09	2 000	1 000	0	3 000
	6 000	5 000	4 000	15 000

La minuta de constitución establece que las utilidades serán distribuidas proporcionalmente a los capitales aportados. Al 31 de diciembre la sociedad arrojó una utilidad neta de \$ 3 000. ¿Cuánto le corresponderá a cada socio si se acuerda que la utilidad sea distribuida en función al tiempo de cada aportación?

Solución

Numerales de la sociedad

Fecha	Capital	Días	Numeral
11-07	9 000	173	1 557 000
23-08	3 000	130	390 000
15-09	3 000	107	321 000
31-12	15 000		2 268 000

Numerales del socio Carlos

Fecha	Capital	Días	Numeral
11-07	3 000	173	519 000
23-08	1 000	130	130 000
15-09	2 000	107	214 000
31-12	6 000		863 000

Numerales del socio Eduardo

Fecha	Capital	Días	Numeral
11-07	2 000	173	346 000
23-08	2 000	130	260 000
15-09	1 000	107	107 000
31-12	6 000		713 000

Numerales del socio Antonio

Fecha	Capital	Días	Numeral
11-07	4 000	173	692 000
31-12	4 000		692 000

Considerando la utilidad del socio como un interés, la utilidad de la sociedad como un capital y la relación Numeral Socio/Numeral Sociedad como una tasa tenemos:

$$Ut. Socio = Ut. Sociedad \times \frac{\text{Numeral socio}}{\text{Numeral Sociedad}}$$

$$I = P \times i$$

Carlos	=	3 000 x 863 000/2 268 000 =	1 141,53
Eduardo	=	3 000 x 713 000/2 268 000 =	943,12
Antonio	=	3 000 x 692 000/2 268 000 =	<u>915,34</u>
			3 000,00

12. El 25 de junio el saldo de una cuenta de ahorros fue de S/. 1 500. Efectúe la liquidación de dicha cuenta al 30 de junio del mismo año, aplicando una tasa anual de interés simple del 24% .

Solución.

S = ?	S = P(1 + in)
P = 1 500	S = 1 500(1 + 0,24 x 5/360)
n = 5/360	S = 1 505
i = 0,24	

13. ¿Por qué importe se deberá aceptar un pagaré que vence el 4 de junio, si lo descontamos el 16 de abril pagando una tasa anual de interés simple del 24% y necesitamos disponer de S/. 7 500 en la fecha del descuento?

Solución

$$\begin{aligned}
 S &= ? & S &= P(1 + in) \\
 P &= 7\,500 & S &= 7\,500(1 + 0,24 \times 49/360) \\
 n &= 49/360 & S &= 7\,745 \\
 i &= 0,24
 \end{aligned}$$

14. ¿Por qué importe debe extenderse un pagaré a 45 días para obtener un efectivo de S/. 20 000 descontándolo racionalmente a una tasa anual de interés simple del 36%? La empresa financiera además carga S/. 10 de gastos, S/. 5 de portes y efectúa una retención del 5% sobre el préstamo líquido. Efectúe la liquidación correspondiente.

Solución

Adaptando la fórmula (16) para incluir la tasa de retención i' y los gastos G tenemos:

$$\begin{aligned}
 S &= ? & S &= P[1 + (in + i')] + G \\
 P &= 20\,000 & S &= 20\,000[1 + 0,36 \times 45/360 + 0,05] + 15 \\
 i &= 0,36 & S &= 21\,915 \\
 i' &= 0,05 \\
 G &= 15
 \end{aligned}$$

Liquidación

Importe nominal del pagaré		21 905
Descuento $20\,000 \times 0,36 \times 45/360$	900	
Gastos	10	
Portes	5	
Retención $20\,000 \times 0,05$	1 000	(1 915)
Importe disponible		20 000

15. Cierta capital y sus intereses simples hacen un total de S/. 3 000, habiendo estado impuesto desde el 9 de marzo al 15 de abril a una tasa

trimestral del 9%. ¿Cuál ha sido el interés y el capital que lo ha producido?

Solución

$$\begin{array}{lll}
 I, P = ? & P = S/[1 + (in)] & I = S - P \\
 S = 3\,000 & P = 3\,000/[1 + (0,09 \times 37/90)] & I = 3\,000 - 2\,892,96 \\
 i = 0,09 & P = 2\,892,96 & I = 107,04 \\
 n = 37/90 & &
 \end{array}$$

16. Determinar el interés simple incluido en el monto de S/. 10 000, obtenido el 2 de junio sobre un capital colocado el 1 de mayo a una tasa anual del 36%.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 I = ? & I = S - P \quad (1) \quad P = S/[1 + (in)] \quad (2) \\
 S = 10\,000 & \text{reemplazando (2) en (1) tenemos:} \\
 n = 32/360 & \\
 i = 0,36 & I = S[1 - 1/(1 + in)]
 \end{array}$$

$$I = 10\,000 \left[1 - \frac{1}{1 + 0,36 \times 32/360} \right] = 310,08$$

17. Un artefacto electrodoméstico tiene un precio de contado de S/. 2 000, pero puede adquirirse a crédito con una cuota inicial de S/. 1 000 y una letra de S/. 1 100 a 60 días, ¿cuál es la tasa de interés simple mensual cargada en este financiamiento?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 i = ? & i = \frac{S/P - 1}{n} \\
 P = 1\,000 & \\
 S = 1\,100 & \\
 n = 2 & i = \frac{1\,100/1\,000 - 1}{2} = 0,05 \\
 & i = 5\%
 \end{array}$$

18. ¿En qué tiempo un capital de S/. 1 000 se habrá convertido en un monto de S/. 1 100 a una tasa mensual del 5% de interés simple?

Solución

$$n = ?$$

$$P = 1\,000$$

$$S = 1\,100$$

$$i = 0,05$$

$$n = \frac{S/P - 1}{i}$$

$$n = \frac{1\,100/1\,000 - 1}{0,05}$$

$$n = 2 \text{ meses}$$

19. Calcular el monto simple que habrá producido un capital de S/. 5 000 colocado durante 5 meses. La tasa mensual fue del 3% durante los dos primeros meses y del 3,5% durante los 3 meses restantes.

Solución

$$S = ?$$

$$P = 5\,000$$

$$i_1 = 0,03$$

$$i_2 = 0,035$$

$$n_1 = 2$$

$$n_2 = 3$$

$$S = P [1 + (i_1 n_1 + i_2 n_2)]$$

$$S = 5\,000 [1 + (0,03 \times 2 + 0,035 \times 3)]$$

$$S = 5\,000 \times 1,165$$

$$S = 5\,825$$

20. Dos letras de cambio de S/. 8 000 y S/. 9 000 c/u con vencimiento a 60 y 90 días respectivamente, son descontadas a una tasa mensual del 3%. Calcule el valor presente de ambas letras a interés simple.

Solución

$$P = ?$$

$$S_1 = 8\,000$$

$$S_2 = 9\,000$$

$$n_1 = 2$$

$$n_2 = 3$$

$$i = 0,03$$

$$P = \frac{S_1}{1 + i n_1} + \frac{S_2}{1 + i n_2}$$

$$P = \frac{8\,000}{1 + 0,03 \times 2} + \frac{9\,000}{1 + 0,03 \times 3}$$

$$P = 7\,547,17 + 8\,256,88$$

$$P = 15\,804,05$$

21. Actualmente tengo una deuda de S/. 4 000 la cual vencerá dentro de 3 meses y acuerdo con mi acreedor cancelarla hoy, actualizando el monto con las siguientes tasas mensuales de interés simple: 2% para el primer mes y 2,5% para los dos últimos meses. Halle el importe a cancelar.

Solución

$$P = ?$$

$$S = 4\,000$$

$$i_1 = 0,02$$

$$n_1 = 1$$

$$i_2 = 0,025$$

$$n_2 = 0,02$$

$$P = \frac{S}{1 + (i_1 n_1 + i_2 n_2)}$$

$$P = \frac{4\,000}{1 + (0,02 \times 1 + 0,025 \times 2)}$$

$$P = 3\,738,32$$

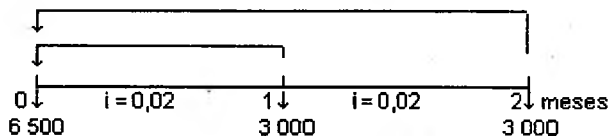
22. En el proceso de adquisición de un torno, la Empresa Crayon S.A. recibe de sus proveedores las siguientes propuestas:

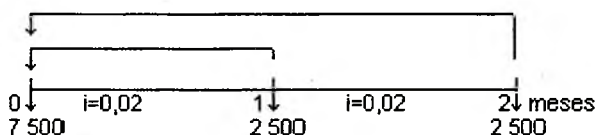
Proveedor	Cuota inicial	Cuotas mensuales	
		1a.	2a.
A	6 500	3 000	3 000
B	7 500	2 500	2 500

¿Cuál es la mejor oferta evaluando cada una a valor presente y asumiendo que el costo del dinero es del 2% de interés simple mensual?

Solución

Proveedor A



Proveedor B

Solución

$$A = 6\,500 + \frac{3\,000}{1 + 0,02 \times 1} + \frac{3\,000}{1 + 0,02 \times 2} = 12\,325,79$$

$$B = 7\,500 + \frac{2\,500}{1 + 0,02 \times 1} + \frac{2\,500}{1 + 0,02 \times 2} = 12\,354,83$$

6. Listado de fórmulas

$$I = Pin \quad (9) \quad \text{Interés Simple}$$

$$P = \frac{I}{in} \quad (10) \quad \text{Capital inicial}$$

$$i = \frac{I}{Pn} \quad (11) \quad \text{Tasa de interés}$$

$$n = \frac{I}{Pi} \quad (12) \quad \text{Tiempo}$$

$$I = P \sum_{k=1}^m i_k n_k \quad (13) \quad \text{Interés simple con variaciones de tasas}$$

$$I = i \sum_{k=1}^m P_k n_k \quad (14) \quad \text{Numerales}$$

$$S = P + I \quad (15) \quad \text{Monto}$$

$$S = P (1 + in) \quad (16) \quad \text{Monto}$$

$$i = \frac{S/P - 1}{n} \quad (17) \quad \text{Tasa de interés}$$

$$n = \frac{S/P - 1}{i} \quad (18) \quad \text{Tiempo}$$

$$S = P \left[1 + (i_1 n_1 + i_2 n_2 + \dots + i_m n_m) \right] \quad (19) \quad \text{Monto con variaciones de tasas}$$

$$P = S \left[\frac{1}{1 + in} \right] \quad (20) \quad \text{Capital inicial}$$

7. Problemas propuestos

Interés

1. Hallar el interés simple de S/. 4 000 colocados durante 6 días al 36% anual. Rp. I = S/. 24.
2. ¿Qué interés simple podrá disponerse el 18 de mayo, si el 15 de abril se invirtió S/. 5 000 a una tasa anual del 24%? Rp. S/. 110.
3. ¿Cuál es el interés simple de S/. 3 000 en 8 meses al 48% anual? Rp. I = S/. 960.
4. ¿Cuánto habrá ganado un capital de S/. 10 000 en 1 año, 2 meses y 26 días al 24% anual de interés simple? Rp. I = S/. 2 973,33.
5. Calcular el interés simple de S/. 2 000 al 2,5% mensual desde el 12 de marzo al 15 de junio del mismo año. Rp. I = S/. 158,33.

Principal

6. ¿Qué capital colocado al 24% anual, ha producido S/. 300 de interés simple al término de 18 semanas? Rp. P = S/. 3 571,43.
7. ¿Cuál será el capital que habrá producido un interés simple de S/. 800 en 7 trimestres al 26% anual? Rp. P = S/. 1 758,24.

8. Si deseo ganar un interés simple de S/. 3 000 en el período comprendido entre el 4 de abril y 31 de mayo, ¿qué capital debo colocar en un banco que paga una tasa mensual del 2%? Rp. $P = S/. 78\,947,37$.

Tasa

9. ¿Cuál es la tasa de interés simple mensual aplicada para que un capital de S/. 8 000 colocado a 2 años y 6 meses haya ganado S/. 6 000? Rp. $i = 2,5\%$ mensual.
10. Un capital de S/. 2 000 ha producido un interés de S/. 60 durante 36 días, calcule la tasa anual de interés simple. Rp. $i = 30\%$ anual.

Tiempo

11. ¿En qué tiempo podré triplicar un capital a una tasa mensual de interés simple del 5%? Rp. $n = 40$ meses.
12. ¿En qué tiempo podrá quintuplicarse un capital colocado a interés simple percibiendo una tasa trimestral del 15%? Rp. $n = 26,66$ trimestres, 80 meses.
13. ¿Durante qué tiempo habrá estado impuesto un capital de S/. 15 000 al 28% anual, si el interés simple producido es de S/. 300. Rp. $n = 25,71$ días, aproximadamente 26 días.
14. Un capital de S/. 12 000 ha producido S/. 541,68 de interés simple al 12,5% anual. Determinar el tiempo. Rp. $n = 130$ días.
15. ¿Por cuánto tiempo ha estado impuesto un capital de S/. 10 000 que a la tasa del 2% de interés simple mensual ha producido un interés de S/. 2 000? Rp. $n = 10$ meses.

Interés simple con variaciones de tasa

16. ¿Qué interés simple habrá ganado una inversión de S/. 2 000 colocado del 3 de marzo al 28 de junio del mismo año a una tasa mensual del 3%, la cual varió el 16 de abril al 2,8% y posteriormente al 2,6% el 16 de junio? ¿Cuál es la tasa acumulada? Rp. $I = S/. 222,67$; $i = 11,133\%$.
17. Se ha suscrito un contrato de crédito por S/. 8 000 para pagarlo dentro de 12 meses con interés simple, a una tasa del 36% anual y sujeta a las variaciones del mercado. Si al vencimiento de dicho contrato las tasas anuales fueron: 36% durante 2 meses, 34% durante 3 meses, 35%

durante 4 meses y 34,5% durante 3 meses. ¿Qué interés deberá cancelarse al vencimiento del contrato? ¿Cuál es la tasa acumulada? Rp. $I = S/. 2\,783,33$; $i = 34,79\%$ anual.

18. Una deuda de S/. 2 000 contraída el 8 de junio para ser cancelada el 8 de julio y pactada originalmente a una tasa anual de interés simple del 24%, sufre las siguientes variaciones a partir de las siguientes fechas: día 12 de junio 2,5% mensual, día 24 de junio 9% trimestral, día 3 de julio 21% semestral. ¿Qué interés se pagará al vencimiento? Rp. $I = S/. 55$.

Numerales

19. Una cuenta de ahorros abierta el 4 de abril con un depósito inicial de S/. 500 tuvo en ese mes el siguiente movimiento: día 8 depósito de S/. 100, día 17 retiro de S/. 400, día 23 depósito de S/. 500, día 23 retiro de S/. 200. ¿Qué interés simple acumuló al 30 de abril percibiendo una tasa anual del 24%? Rp. $I = S/. 8,07$.
20. El 2 de junio se abre una cuenta de ahorros con S/. 2 000 y se efectúan depósitos de S/. 500 y S/. 300 los días 8 y 16 y un retiro de S/. 200 el día 26 de junio. La tasa anual pactada fue 28% la cual bajó al 26% a partir del 16 de junio. ¿Cuál fue el interés simple acumulado y cual es el saldo disponible al 1 de julio? Rp. $I = S/. 54,50$; $S = S/. 2\,654,50$.
21. Una cuenta de ahorros abierta el 3 de marzo con S/. 1 500 ha tenido los siguientes movimientos:

03.03	depósito	1500	03.05	retiro	400
05.03	depósito	230	06.05	retiro	100
09.03	depósito	428	11.05	depósito	615
25.03	retiro	100	17.05	depósito	385
29.03	depósito	347	20.05	retiro	500
06.04	depósito	861	02.06	depósito	140
12.04	depósito	345	04.06	depósito	123
15.04	retiro	500	08.06	depósito	614
19.04	retiro	300	14.06	retiro	200
27.04	depósito	128	18.06	retiro	50
29.04	retiro	400	21.06	retiro	200

Si la entidad financiera abona los intereses simples en la cuenta de ahorros el primer día del mes siguiente, y la cuenta es cancelada el 1 de julio, calcule el importe disponible por el cliente a esa fecha: a) utilizando una tasa anual del 48%; b) si la tasa bajó al 42% a partir del

16 de abril y a 36% a partir del 1 de junio. Rp.a) S/. 3 412,72; b) S/. 3 345.

Monto

22. Habiendo colocado en una cuenta de ahorros S/. 3 000 a una tasa anual de interés simple del 24%, ¿cuánto se habrá acumulado: a) al cabo de 46 días, b) al cabo de 46 días abonando los intereses al principal cada 30 días? Rp. a) $S = S/. 3\,092$ b) $S = S/. 3\,092,64$.
23. Un señor debía S/. 1 000. Conviniéndole retrasar la deuda por 14 días, aceptó pagar un interés simple del 0,25% diario. ¿Qué monto deberá cancelar transcurrido dicho plazo? Rp. $S = S/. 1\,035$.
24. ¿Cuál es el monto simple que ha producido un capital de S/. 5 000 del 6 de abril al 26 de junio del mismo año a una tasa mensual del 2%? Rp. $S = S/. 5\,270$.
25. El 25 de junio el saldo de una cuenta de ahorros fue de S/. 5 000. Calcule su monto al 30 de setiembre aplicando una tasa mensual de interés simple del 3%, considerando que la entidad financiera abona los intereses en la cuenta cada fin de mes. Rp. $S = S/. 5\,501,62$.

Monto con variaciones de tasa

26. Una inversión de S/. 8 000 colocada a interés simple rindió una tasa mensual del 3% durante los primeros cuatro meses, el quinto mes rindió 40% anual y la última quincena rindió una tasa del 12% trimestral. ¿Cuál fue el monto acumulado? Rp. $S = S/. 9\,386,67$.
27. Calcule el monto simple de un depósito de ahorro de S/. 5 000 colocado el 9 de agosto y cancelado el 1 de setiembre. Las tasas anuales han sido: 30% a partir del 1 de agosto; 28% a partir del 16 de agosto y 26% a partir del 1 de setiembre. Rp. $S = S/. 5\,091,39$.
28. Un artículo cuyo precio de contado es S/. 2 000 se vende con una cuota inicial de S/. 800 y sobre el saldo cancelable dentro de 60 días, se cobran las siguientes tasas: 24% anual durante 7 días, 0,1% diario durante 13 días, 14% semestral durante 15 días, 9% trimestral durante 25 días. ¿Qué monto simple deberá cancelarse al vencimiento del plazo? Rp. $S = S/. 1\,265,20$.

Tasa de interés

29. Una máquina tiene un precio al contado de \$ 5 000. La empresa Ricky pacta con su proveedor adquirir la máquina pagando una cuota inicial de \$ 2 000 y el saldo dentro de 45 días recargando el 3% mensual de interés sobre el precio al contado. ¿Cuál fue la tasa mensual de interés simple que pagó Ricky? Rp. $i = 5\%$.
30. Un paquete accionario es adquirido el 23 de mayo en S/. 24 000 y vendido el 18 de junio, recibándose en esta fecha un importe neto de S/. 26 800. Calcule la tasa mensual de interés simple de la operación? Rp. $i = 13,46\%$.
31. Un artefacto electrodoméstico tiene un precio al contado de S/. 3 000, pero puede adquirirse a crédito con una cuota inicial de S/. 1 000 y aceptando una letra de S/. 2 200 a 60 días. ¿Cuál es la tasa anual de interés simple cargada en este financiamiento? Rp. $i = 60\%$ anual.
32. ¿A qué tasa mensual un capital de S/. 10 000 se habrá convertido en un monto de S/. 11 500 si dicho capital original fue colocado a interés simple durante 3 meses? Rp. $i = 5\%$.
33. Un artículo cuyo precio al contado es de S/. 120 es vendido con "tarjeta de crédito" para pagar S/. 127,20 dentro de 45 días. ¿Qué tasa mensual de interés simple se cargó al crédito? Rp. 4% mensual.
34. ¿A qué tasa mensual se invirtió un capital de S/. 2 000 colocado a interés simple el 20 de abril cuyo monto al 18 de junio fue S/. 2 500? Rp. $i = 12,71\%$.

Tiempo

35. Un capital de S/. 5 000 se ha incrementado en un 15% por razón de interés simple al 24% anual, hallar el tiempo de la operación. Rp. $n = 0,625$ años; 7,5 meses ó 225 días.
36. ¿En cuántos días una inversión de S/. 7 000 se convertirá en un monto simple de S/. 7 933,34 percibiendo una tasa de rentabilidad anual del 24%? Rp. $n = 200$ días.
37. ¿En cuántos días se triplicará un capital colocándolo a una tasa de interés simple anual de 24%? Rp. $n = 3 000$ días.
38. La empresa Inka recibió S/. 5 000 el 24 de junio por el descuento de un pagaré con valor nominal de S/. 5 500, cuya tasa anual de interés simple

fue del 24%. ¿Cuál fue la fecha de vencimiento? Rp. A los 150 días: el 21 de noviembre.

Valor presente

39. Qué importe debe ser invertido al 24% anual de interés simple para capitalizar S/. 5 000 dentro de 45 días? Rp. $P = S/. 4\,854,37$.
40. Un departamento ubicado en la Av. Sucre de Pueblo Libre es vendido con las siguientes alternativas:
- a) \$ 17 500 al contado.
 - b) \$ 10 000 al contado y el saldo a 60 días con una letra de \$ 7 700.
 - c) \$ 8 000 al contado y el saldo con dos letras, una de \$ 6 000 a 30 días y otra de \$ 3 680 a 60 días.
 - d) \$ 6 000 al contado y el saldo con tres letras de \$ 4 000 con vencimientos a 30, 60, y 90 días respectivamente.
- Si el cliente dispone del efectivo para efectuar la compra al contado y por su capital puede percibir una tasa anual de interés simple del 24% ¿cuál es la oferta más conveniente? Explique. Rp. c) \$ 17 420,81.
41. La suma de un capital y sus intereses simples, desde el 30 de junio al 31 de diciembre de un mismo año, al 2% mensual es de S/. 20 000. Determine el capital original. Rp. $P = S/. 17\,814,73$.
42. ¿Qué capital fue colocado al 20% de interés simple anual, el mismo que al cabo de 38 días se convirtió en S/. 5 000. Rp. $P = S/. 4\,896,63$.
43. Se ha colocado un capital al 4% de interés simple trimestral, habiéndose convertido a los 4 meses en S/. 2 500. ¿Cuál fue el importe de ese capital? Rp. $P = S/. 2\,373,42$.
44. Encuentre el capital que invertido al 4% bimestral durante 87 días ha producido un monto simple de S/. 500. Rp. $P = S/. 472,59$.
45. Cierta capital y sus intereses hacen un total de S/. 2 000. Si la tasa aplicada ha sido del 4% cuatrimestral, habiendo estado colocado el capital inicial durante 6 meses, ¿cuál ha sido el interés simple y el capital que lo ha producido? Rp. $P = S/. 1\,886,79$; $I = S/. 113,21$.
46. Calcule el valor presente a interés simple, de una letra cuyo valor nominal es de S/. 10 000 con vencimiento a 90 días, utilizando una tasa anual del 48%. Rp. $P = S/. 8\,928,57$.
47. ¿Cuánto debe invertirse hoy, a interés simple para acumular S/. 20 000 dentro 120 días en una institución de crédito que paga una tasa del 36% anual? Rp. $P = S/. 17\,857,14$.

Valor presente de un pagaré incluyendo gastos

48. Calcule el valor presente de un pagaré con valor nominal de S/. 10 000 descontado racionalmente a interés simple faltando 45 días para su vencimiento. La empresa financiera cobra una tasa anual del 36% y además carga S/. 10 de gastos, S/. 5 de portes y efectúa una retención del 5% sobre el préstamo neto. Efectúe la liquidación. Rp. $P = S/. 9\,118,72$; Total descuentos = S/. 881,28.

Ecuaciones de valor a interés simple

49. El día de hoy una empresa tiene una deuda de S/. 8 000 la misma que vencerá dentro de 36 días y otra deuda de S/. 12 000 con vencimiento dentro de 58 días. Propone a su acreedor cancelarlas con dos pagos iguales dentro de 45 y 90 días respectivamente. ¿Cuál será el importe de cada pago si el acreedor requiere una tasa anual de interés simple del 24% y la evaluación debe efectuarse tomando como fecha focal el día 90? Rp. $X = S/. 10\,120,20$.
50. Desarrolle el problema No. 49 tomando como fecha focal el día 45. Rp. $X = S/. 10\,119,82$.
51. El 26 de mayo la empresa Todorico solicitó un préstamo de S/. 5 000 para cancelarlo dentro de 90 días al 24% anual de interés simple. El 16 de junio amortizó S/. 2 000 y el 11 de julio amortizó S/. 1 500. ¿Cuál es la fecha de vencimiento y qué importe deberá cancelar al vencimiento del plazo? Rp. 24 de agosto; S/. 1 664.

Problemas combinados

52. Calcule el interés incluido en un monto de S/. 4 000 obtenido de un capital colocado a una tasa anual del 24% de interés simple durante 90 días. Rp. S/. 226,42.
53. Dos capitales iguales son colocados: el primero en el Banco del Norte al 24% anual durante 85 días; el segundo en el Banco del Sur durante 60 días al 28% anual. Por ambas operaciones se recibió un interés simple de S/. 500. ¿Cuál fue el importe de cada capital? Rp. $P = S/. 4\,838,71$.

8. Resumen del capítulo

El interés o costo del dinero es función del capital, la tasa, el tiempo y el riesgo; su cálculo en nuestro sistema financiero se efectúa aplicando al capital una tasa de interés discreta, simple o compuesta, para un período de tiempo determinado. En el interés simple, cuyo crecimiento es de carácter aritmético, la capitalización se efectúa únicamente en la fecha de cancelación de la operación. Capitalizar significa adicionar el interés al capital original formando un capital final o monto. Si el capital inicial se modifica posteriormente por depósitos o retiros y la tasa permanece invariable, entonces el cálculo del interés puede efectuarse a través de numerales. Un numeral es el producto de los saldos de un capital por el número de días que ha permanecido sin variación; los cuales, si son acumulados cada cierto período de tiempo (cada mes en el caso de ahorros) y multiplicados por una tasa diaria, nos dan el interés generado por ese capital. La sumatoria de los productos de capital por tiempo multiplicada por la tasa correspondiente nos da el interés total.

Las ecuaciones de valor equivalente a interés simple deben realizarse tomando como fecha focal el final del horizonte temporal, ya que cargos o abonos realizados en fecha posterior a la del capital inicial y procesados en esas mismas fechas, producen más de una capitalización y, por lo tanto, un incremento de la tasa anunciada.

III

Interés compuesto

Introducción

El interés compuesto es el proceso mediante el cual el interés generado por un capital en una unidad de tiempo, se capitaliza, es decir se adiciona al capital anterior, formando un nuevo capital, el mismo que genera un nuevo interés en la siguiente unidad de tiempo y así sucesivamente durante el plazo pactado, experimentando al final de cada unidad de tiempo un crecimiento geométrico.

El interés compuesto es una sucesión de operaciones a interés simple, en la que después de la primera, su monto constituye el capital inicial de la siguiente.

Al final del primer período de capitalización, el monto de una operación a interés compuesto coincide con el monto a interés simple, si son iguales las tasas y los capitales iniciales.

Para el cálculo del interés compuesto es necesario tener en consideración:

- a) La *tasa nominal* (j).
- b) La *tasa efectiva* (i).
- c) El *número de períodos de capitalización en el año* (m), el cual se halla relacionando el año bancario y la frecuencia de capitalización de la tasa de interés.

- d) La *frecuencia de capitalización* (f): número de días del período capitalizable.
- e) El *horizonte de tiempo* (H): número de días de la operación. Si un contrato de préstamo se amortiza en cuotas o partes, entonces $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$; donde los H_k representan el número de días de cada cuota. Al vencimiento de cada cuota procede el cobro del interés moratorio en adición al interés compensatorio.
- f) El *número de períodos de capitalización* (n) en el horizonte temporal. Se entiende que el número de capitalizaciones debe ser un número entero dado por el cociente H/f .

m aplicable a una tasa j anual

Capitalización	Operación	m
Anual	360/360	1
Semestral	360/180	2
Trimestral	360/90	4
Bimestral	360/60	6
Cada 45 días	360/45	8
Mensual	360/30	12
Quincenal	360/15	24
Diario	360/1	360

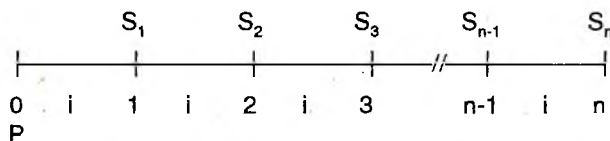
Si la tasa j se expresase mensualmente, entonces m tendría que obtenerse relacionando un mes bancario de 30 días y la frecuencia de capitalización de la tasa de interés mensual.

m aplicable a una tasa j mensual

Capitalización	Operación	m
Anual	30/360	0,0833333
Semestral	30/180	0,1666666
Trimestral	30/90	0,3333333
Bimensual	30/60	0,5000000
Cada 45 días	30/45	0,6666666
Mensual	30/30	1,0000000
Quincenal	30/15	2,0000000
Diario	30/1	30,0000000

1. Cálculo del monto

Si tenemos un capital P , que gana una tasa i por período de tiempo durante n períodos capitalizables, tendríamos al final del horizonte temporal el monto S siguiente:



$$\begin{aligned}
 S_1 &= P + P i = P (1 + i) \\
 S_2 &= S_1 + S_1 i = S_1 (1 + i) = P (1 + i) (1 + i) = P (1 + i)^2 \\
 S_3 &= S_2 + S_2 i = S_2 (1 + i) = P (1 + i)^2 (1 + i) = P (1 + i)^3 \\
 S_n &= S_{n-1} + S_{n-1} i = S_{n-1} (1 + i) = P (1 + i)^{n-1} (1 + i) = P (1 + i)^n
 \end{aligned}$$

$$S = P (1 + i)^n \quad (21)$$

En esta fórmula y las demás del interés compuesto que utilizaremos en este libro, la tasa de interés compuesto i se refiere al período de capitalización. El número de períodos a capitalizar n y la tasa i , necesariamente deben estar expresados en la misma unidad de tiempo (años, trimestres, meses, días, etc).

El factor $(1 + i)^n$ es el *factor simple de capitalización compuesto* FSC. La fórmula (21) entonces puede representarse:

$$S = P \cdot \text{FSC}_{i;n} \quad (21)$$

y se lee: el FSC a una tasa i de n períodos transforma una cantidad presente P en un valor futuro S .

1.1 El factor simple de capitalización

El FSC, factor simple de capitalización, $(1 + i)^n$ es el monto compuesto de 1 a una tasa i por período, durante n períodos y su función es llevar al futuro cualquier cantidad presente o traer al presente cualquier cantidad del pasado.

Ejemplo 1.- Calcule el monto de un capital inicial de S/. 1 000 colocado durante 4 años a una tasa efectiva anual del 18%.

Solución

$$\begin{array}{ll} S = ? & S = P(1 + i)^n \\ P = 1\,000 & S = 1\,000(1 + 0,18)^4 \\ n = 4 & S = 1\,938,78 \\ i = 0,18 & \end{array}$$

Ejemplo 2.- Calcule el monto de un depósito inicial de S/. 2 000 colocado durante 5 meses en un banco que paga una tasa efectiva mensual del 4%.

Solución

$$\begin{array}{ll} S = ? & S = P(1 + i)^n \\ P = 2\,000 & S = 2\,000(1 + 0,04)^5 \\ n = 5 & S = 2\,433,31 \\ i = 0,04 & \end{array}$$

Ejemplo 3.- Un banco paga por los depósitos que recibe del público una tasa nominal mensual del 3% con capitalización trimestral. ¿Qué monto se habrá acumulado con un capital inicial de S/. 3 000 colocado durante 6 meses?

Solución

$$\begin{array}{ll} S = ? & S = P(1 + i)^n \\ P = 3\,000 & S = 3\,000(1 + 0,09)^2 \\ n = 2 \text{ trim.} & S = 3\,564,30 \\ i = 0,09 & \end{array}$$

En los problemas de interés compuesto deben expresarse i y n en la misma unidad de tiempo, efectuando de ser necesario las conversiones apropiadas cuando estas variables correspondan a diferentes períodos de tiempo. En el presente caso debido a que la frecuencia de capitalización es trimestral la tasa mensual ha sido llevada al trimestre, multiplicando la tasa nominal mensual por 3, asimismo los períodos mensuales también han sido convertidos en trimestres. En los siguientes problemas estas conversiones serán trabajadas directamente

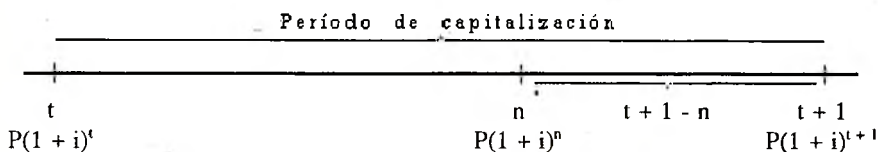
en los datos del planteamiento del problema, para ser operados directamente en las fórmulas correspondientes.

1.2 El FSC con n no entero

Debido a que el interés es función del tiempo, se considera que el capital devenga un interés continuo que capitaliza discretamente (al final de cada cierto período de tiempo). Entonces para un número no entero de períodos de capitalización, el FSC se ajustará a la función exponencial del tipo $(1 + i)^{H/t}$.

En la deducción del monto compuesto ha quedado establecido que:

- Las capitalizaciones se efectúan a final de cada período de capitalización.
- Si la operación a interés compuesto se interrumpe en algún punto del tiempo que no coincide con el momento de capitalización, por esta fracción de período no existe la obligación de pagar interés.
- Por equidad entre deudor y acreedor y de acuerdo a las prácticas financieras, el interés compuesto para un número no entero de períodos capitalizados se calcula aplicando exponente fraccionario.
- La consistencia matemática de este proceso, considerando un capital P , n un número no entero de períodos capitalizables y t el mayor entero menor que n , se sustenta a continuación:



El monto hasta el momento t es $P(1 + i)^t$.

El monto hasta el momento $t + 1$ es

$$P(1 + i)^{t+1} \quad (1)$$

Asumamos por analogía que el monto hasta el momento n es $P(1 + i)^n$. Entonces para ser consistente, el monto hasta el momento $t + 1$ debe ser igual al monto en el momento n llevado hasta $t + 1$, es decir:

$$P(1 + i)^n (1 + i)^{t+1-n} \quad (2)$$

$$P(1+i)^n (1+i)^{t+1-n} = P(1+i)^{n+t+1-n} = P(1+i)^{t+1}$$

Con lo que demostramos la igualdad de (2) y (1) y la consistencia de la aplicación de n no entero.

Se concluye que un n no entero indica un número entero de capitalizaciones, en la cual la parte no entera implica que la última capitalización se ha realizado por un *plazo menor* al período establecido.

Ejemplo 4.- Consideremos un capital de S/. 1 000 depositado en un banco donde gana una tasa efectiva anual del 10%. ¿Qué monto tendrá que pagarse si el depósito se cancela al finalizar el primer semestre?

$$\begin{aligned} S &= P(1+i)^{H/f} \\ S &= 1\,000(1+0,1)^{6/12} \\ S &= 1\,048,81 \end{aligned}$$

Este monto colocado nuevamente durante un semestre a la misma tasa anterior arrojará el siguiente monto:

$$S = 1\,048,81(1+0,1)^{6/12} = 1\,100$$

Puede observarse que el monto de S/. 1 100 al final del año representa un incremento efectivo del 10% con relación al capital inicial colocado al inicio de año.

Ejemplo 5.- Una persona solicita a un banco un préstamo de S/. 2 000, el mismo que se le abona en su cuenta corriente el 26 de mayo. ¿Qué monto deberá pagar el 24 de julio, fecha que cancela el préstamo, si el banco cobra una tasa efectiva mensual del 5%?

Solución

$$\begin{aligned} S &= ? & S &= P(1+i)^{H/f} \\ P &= 2\,000 & S &= 2\,000(1+0,05)^{59/30} \\ H &= 59 & S &= 2\,201,42 \\ f &= 30 \\ i &= 0,05 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.- ¿Qué monto deberá pagarse por un sobregiro bancario de S/. 2 000 vigente desde el 24 al 30 de junio, si el banco cobra una tasa efectiva mensual del 5%?

Solución

$$S = ?$$

$$P = 2\,000$$

$$H = 6$$

$$f = 30$$

$$i = 0,05$$

$$S = P(1 + i)^{H/f}$$

$$S = 2\,000(1 + 0,05)^{6/30}$$

$$S = 2\,019,61$$

1.3 Tasa nominal y tasa efectiva

Cuando una tasa es susceptible de proporcionalizarse (dividirse o multiplicarse) para ser expresada en otra unidad de tiempo diferente a la original, con el objeto de capitalizarse una o más veces, recibe el nombre de tasa nominal. En este caso la tasa nominal es una tasa referencial mientras la tasa efectiva refleja el número de capitalizaciones que ha experimentado durante un plazo determinado.

El monto compuesto aplicando una tasa nominal j capitalizable m veces en un plazo determinado durante n períodos se calcula con la siguiente fórmula:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^n \quad (22)$$

Ejemplo 7.- Calcular el monto a pagar dentro de 4 meses por un préstamo bancario de S/. 8 000 a una tasa nominal anual del 36% capitalizable mensualmente.

Solución

$$S = ?$$

$$n = 4 \text{ meses}$$

$$P = 8\,000$$

$$j = 0,36$$

$$S = P(1 + j/m)^n$$

$$S = 8\,000(1 + 0,36/12)^4$$

$$S = 9\,004,07$$

Ejemplo 8.- La empresa Audio S.A. compró en el Banco Latex un Certificado de Depósito a Plazo (CDP) por el importe de S/. 5 000 a un año de vencimiento, ganando una tasa nominal anual del 36% con capitalización trimestral, el cual tuvo que redimirlo al fin del octavo mes. ¿Cuál fue el monto que originó dicha inversión?

Solución

$S = ?$

$$S = P(1 + j/m)^{H/f}$$

$P = 5\,000$

$$S = 5\,000(1 + 0,36/4)^{240/90}$$

$H = 240$ días

$$S = 6\,291,79$$

$f = 90$ días

$j = 0,36$

1.4 El FSC con variaciones en la tasa de interés

Cuando la tasa efectiva no varía durante el plazo pactado, el FSC capitaliza la unidad monetaria a esa misma tasa durante n períodos:

$$(1 + i)^n = (1 + i) (1 + i) (1 + i) \dots$$

Si la tasa por período varía, las capitalizaciones durante el plazo pactado H , se efectúan cambiando la tasa tantas veces como sea necesario para cada período de tiempo vigente.

Siendo $i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_m$ las tasas efectivas de interés vigentes durante $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_m$ períodos respectivamente, tenemos:

$$(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} (1 + i_3)^{n_3} \dots$$

Habiendo definido $n = H/f$, entonces el FSC queda modificada de la siguiente forma:

$$(1 + i_1)^{H_1/f} (1 + i_2)^{H_2/f} (1 + i_3)^{H_3/f} \dots$$

$$\text{donde } H_1 + H_2 + H_3 + \dots = H$$

Ejemplo 9.- Calcule el monto de un capital de S/. 1 000 colocado durante tres meses. La tasa efectiva mensual pactada es del 3%, 4% y 5% para el primer, segundo y tercer mes respectivamente.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 S = ? & S = P (1 + i_1) (1 + i_2) (1 + i_3) \\
 P = 1\,000 & S = 1\,000(1 + 0,03) (1 + 0,04) (1 + 0,05) \\
 i_1 = 0,03 & S = 1\,000(1,12476) \\
 i_2 = 0,04 & S = 1\,124,76 \\
 i_3 = 0,05 &
 \end{array}$$

Ejemplo 10.- Una empresa solicitó a un banco un préstamo de S/. 8 000 cancelable dentro de 6 meses a una tasa nominal anual del 36% con capitalización trimestral. La tasa es variable de acuerdo a las condiciones del mercado. En la fecha de vencimiento del contrato de crédito se conocen las siguientes variaciones de tasas anuales: 36% durante los dos primeros meses y 48% para el resto del período, ambas capitalizables trimestralmente. ¿Qué monto deberá cancelar al vencimiento?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 S = ? & S = P (1 + i_1)^{H1/f} (1 + i_2)^{H2/f} \\
 P = 8\,000 & S = 8\,000(1 + 0,36/4)^{2/3} (1 + 0,48/4)^{4/3} \\
 i_1 = 0,09 \quad H_1 = 2 \text{ meses} & S = 9\,794,82 \\
 i_2 = 0,12 \quad H_2 = 4 \text{ meses} & \\
 f = 3 \text{ meses (1 trim)} &
 \end{array}$$

1.5 Capitalización calendaria

Las capitalizaciones: anual, semestral, trimestral, mensual, etc. están referidas a períodos de capitalización del mismo número de días (360, 180, 90, 30, etc); mientras la "capitalización calendaria" abarca períodos capitalizables en fechas fijas e incluyen períodos de capitalización en tiempos variables, dependiendo de los días incluidos en cada mes del año.

Ejemplo 11.- Señale las fechas de capitalización de una transacción llevada a cabo el 2 de abril con vencimiento el 28 de diciembre del mismo año, considerando la capitalización de intereses: a) trimestral, b) "trimestre calendario vencido" (TCV).

Solución

Capitalización

Trimestral		Trim. Calendario	
Fecha	Días	Fecha	Días
02.04	90	02.04	91
01.07	90	02.07	92
29.09	90	02.10	92
28.12		02.01	
Total	270	Total	275

En el presente ejemplo, la capitalización trimestral origina períodos uniformes de tiempo con vencimientos en distintas fechas del mes, mientras la capitalización calendaria TCV origina períodos diferentes de tiempo en fechas mensuales con vencimientos fijos.

2. Cálculo del capital inicial

De la ecuación (21) despejamos P

$$P = S (1 + i)^{-n} \quad (23)$$

El factor $(1 + i)^{-n}$ es el *factor simple de actualización compuesto* FSA. La fórmula (23) entonces puede representarse:

$$P = S \cdot \text{FSA}_{i,n} \quad (23)$$

y se lee: el FSA a una tasa i de n períodos transforma una cantidad futura S en un valor presente P o capital inicial.

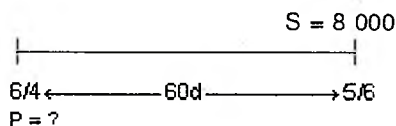
2.1 El factor simple de actualización

El FSA, factor simple de actualización, $(1 + i)^{-n}$ es el valor presente compuesto de 1 a una tasa i por período, durante n períodos y su función es traer al presente cualquier cantidad futura o llevar al pasado cualquier cantidad del

presente. Generalmente n es un exponente entero, pero cuando H y f no sean múltiplos n se expresará en la forma de fracción H/f , adoptando el FSA la siguiente expresión: $(1 + i)^{-H/f}$

Ejemplo 12.- El 6 de abril la empresa Pert descontó en el Banco Mercante un pagaré cuyo valor nominal fue de S/. 8 000 y su vencimiento el 5 de junio. Calcule el importe abonado por el banco a Pert, considerando una tasa nominal del 36% anual con capitalización mensual.

Solución



$$P = ?$$

$$S = 8\,000$$

$$i = 0,03$$

$$n = 60 \text{ días (2 meses)}$$

$$P = S(1 + i)^{-n}$$

$$P = 8\,000(1 + 0,36/12)^{-2}$$

$$P = 7\,540,77$$

2.2 FSA con variaciones en la tasa de interés

Cuando la tasa de interés por período varía, la actualización durante el plazo pactado se efectúa cambiando la tasa tantas veces como sea necesario para cada período de tiempo vigente. En forma similar al FSC, el FSA queda modificado del siguiente modo:

$$(1 + i_1)^{-(H_1/f)} (1 + i_2)^{-(H_2/f)} (1 + i_3)^{-(H_3/f)} \dots$$

$$\text{donde } H_1 + H_2 + H_3 + \dots = H$$

Ejemplo 13.- Faltando 28 días para su vencimiento una letra de S/. 6 000 es descontada en un banco a una tasa nominal anual del 48% con capitalización mensual. ¿Qué importe recibió el descontante?

Solución

$$P = ?$$

$$S = 6\,000$$

$$P = S(1 + i)^{-(H/f)}$$

$$P = 6\,000(1 + 0,48/12)^{-(28/30)}$$

$$H = 28 \text{ días}$$

$$f = 30 \text{ días}$$

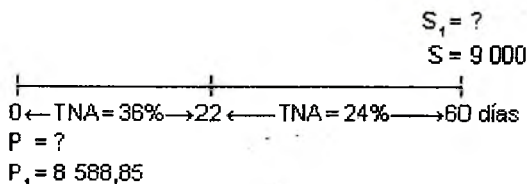
$$i = 0,04$$

$$P = 6\,000 \times 0,9640558996$$

$$P = 5\,784,34$$

Ejemplo 14.- Un pagaré con valor nominal de S/. 9 000 y vencimiento dentro de 60 días es descontado matemáticamente hoy, aplicando una tasa nominal anual del 36% con capitalización mensual. a) ¿Cuál será el importe a cancelar al vencimiento, si la tasa anual bajó al 24% después de 22 días? b) ¿Cuál hubiese sido el importe verdadero del abono de haber conocido de antemano la disminución en la tasa de interés?

Solución



a) Importe a cancelar al vencimiento

Debido a que el monto se ha descontado originalmente con la tasa del 36%, hallaremos su valor presente y lo llevaremos al futuro con las variaciones de tasas ocurridas: 22 días al 36% anual y 38 días al 24% anual.

1) Cálculo del valor presente

$$P = ?$$

$$S = 9\,000$$

$$i = 0,03$$

$$n = 60 \text{ días (2 meses)}$$

$$P = S(1 + i)^{-n}$$

$$P = 9\,000(1 + 0,36/12)^{-2}$$

$$P = 8\,483,36$$

2) Cálculo del valor futuro (importe al vencimiento)

$$S_1 = ?$$

$$P = 8\,483,36$$

$$i_1 = 0,03 \quad H_1 = 22 \text{ días}$$

$$i_2 = 0,02 \quad H_2 = 38 \text{ días}$$

$$f = 30 \text{ días (1 mes)}$$

$$S_1 = P(1 + i_1)^{H_1/f} (1 + i_2)^{H_2/f}$$

$$S_1 = 8\,483,36(1 + 0,36/12)^{22/30} (1 + 0,24/12)^{38/30}$$

$$S_1 = 8\,889,46$$

b) Cálculo del valor presente con variaciones de tasas.

Si se hubiesen conocido en la fecha del descuento las futuras variaciones de tasas (lo cual no es posible, debido a las fluctuaciones de tasas en el mercado), el importe verdadero del valor presente sería calculado del siguiente modo.

$$\begin{aligned}
 P_1 &= ? & P_1 &= S(1 + i_1)^{-(H_1/f)} (1 + i_2)^{-(H_2/f)} \\
 S &= 9\,000 & P_1 &= 9\,000(1 + 0,03)^{-(22/30)} (1 + 0,02)^{-(38/30)} \\
 i_1 &= 0,03 \quad H_1 = 22 \text{ días} & P_1 &= 8\,588,85 \\
 i_2 &= 0,02 \quad H_2 = 38 \text{ días} \\
 f &= 30 \text{ días (1 mes)}
 \end{aligned}$$

En el caso a) se recibe 8 483,36 y se cancela 8 889,46 mientras que en el caso b) se recibe 8 588,85 y se cancela 9 000 al vencimiento del pagaré.

3. Cálculo de la tasa de interés

De la ecuación (21) despejamos i :

$$i = \left(\frac{S}{P} \right)^{1/n} - 1 \quad (24)$$

En (24) i corresponde al período de capitalización en el que se haya expresado n .

Ejemplo 15.- ¿A qué tasa efectiva mensual un capital de S/. 1 000 se habrá convertido en un monto de S/. 1 100 si dicho capital original fue colocado a 3 meses?

Solución

$$\begin{aligned}
 i &= ? \text{ mensual} & i &= (S/P)^{1/n} - 1 \\
 P &= 1\,000 & i &= (1\,100/1\,000)^{1/3} - 1 \\
 S &= 1\,100 & i &= 0,0322801155 \\
 n &= 3 \text{ meses} & i &= 3,23\% \text{ efectivo mensual}
 \end{aligned}$$

4. Cálculo del número de períodos de capitalización

De la ecuación (21) despejamos n:

$$n = \frac{\text{Log } (S/P)}{\text{Log } (1 + i)} \quad (25)$$

En la fórmula (25) n es el número de unidades de tiempo a la que hace referencia i. Por ejemplo, si i es mensual n es el número de meses, si i es anual n es el número de años, etc.

Ejemplo 16.- ¿En qué tiempo se duplicará un capital a una tasa efectiva del 3% mensual?

Solución

$$n = ?$$

$$S = 2$$

$$P = 1$$

$$i = 0,03$$

$$n = \frac{\text{Log } S/P}{\text{Log } (1 + i)}$$

$$n = \frac{\text{Log } 2/1}{\text{Log } 1,03} = 23,44977772 \text{ meses}$$

$$n = 23,44977772 \times 30 = 703 \text{ días}$$

5. Cálculo del interés

Por definición el interés es la diferencia entre el monto y su capital inicial:

$$I = S - P$$

Reemplazando S en la ecuación anterior por su equivalente $P(1 + i)^n$ tenemos

$$I = P(1 + i)^n - P$$

$$I = P [(1 + i)^n - 1] \quad (26)$$

De la ecuación (26) despejamos P, i y n

$$P = \frac{I}{(1+i)^n - 1} \quad (27) \quad i = \left(\frac{I}{P} + 1 \right)^{1/n} - 1 \quad (28) \quad n = \frac{\text{Log } (I/P + 1)}{\text{Log } (1 + i)} \quad (29)$$

Ejemplo 17.- Calcule el interés compuesto ganado en un trimestre por una inversión de S/. 3 000, colocado a una tasa nominal del 18% anual con capitalización bimestral.

Solución

Dividiendo la tasa anual del 18% entre los 6 bimestres que tiene un año, obtenemos una tasa bimestral del 3%.

$$\begin{aligned} I &= ? \text{ trimestral} & I &= P[(1+i)^{1/f} - 1] \\ P &= 3\,000 & I &= 3\,000[1.03^{3/2} - 1] \\ i &= 0.03 & I &= 136 \\ n &= 3/2 \text{ bimestres} \end{aligned}$$

Ejemplo 18.- Para ganar un interés compuesto de S/. 500 en un plazo de 18 días, ¿cuánto debe colocarse en una institución de crédito que paga una tasa efectiva anual del 20%?

Solución

$$\begin{aligned} P &= ? & P &= I / [(1+i)^n - 1] \\ I &= 500 & P &= 500 / [1.2^{18/360} - 1] \\ n &= 18/360 & P &= 54\,598.53 \\ i &= 0.2 \end{aligned}$$

Ejemplo 19.- Calcule la tasa efectiva mensual cargada en la compra de un artefacto cuyo precio de contado es de S/. 1 000, pero financiado sin cuota inicial y con una letra a 45 días su importe es de S/. 1 250.

Solución

$$i = ? \quad i = \left(\frac{I}{P} + 1 \right)^{1/n} - 1$$

$$\begin{aligned} P &= 1000 \\ I &= 250 \\ n &= 45/30 \end{aligned}$$

$$i = \left(\frac{250}{1000} + 1 \right)^{1/(45/30)} - 1 = 0,1604 = 16,04\%$$

Ejemplo 20.- El cargo por intereses de un sobregiro bancario de S/. 25 000 ha sido de S/. 865. Si el banco cobra una tasa efectiva mensual del 4%, ¿cuánto tiempo estuvo sobregirada la cuenta?

Solución

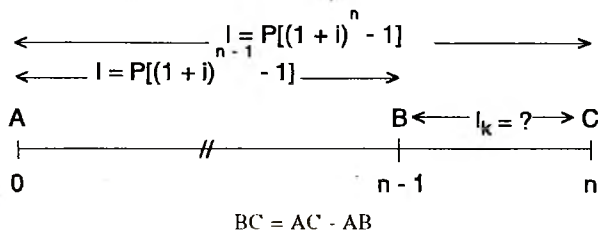
$$\begin{aligned} n &= ? \\ P &= 25\,000 \\ I &= 865 \\ i &= 0,04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\text{Log } (I/P + 1)}{\text{Log}(1 + i)} \\ n &= \frac{\text{Log } (865/25\,000 + 1)}{\text{Log } 1,04} = 0,8672682327 \text{ meses} \\ n &= 26 \text{ días} \end{aligned}$$

5.1 Interés devengado en cualquier período capitalizable

El interés compuesto tiene un crecimiento geométrico en el cual el interés de cualquier período después del segundo es mayor que el generado en el período anterior; entonces ¿cómo podríamos conocer, por ejemplo, los intereses generados por un determinado capital durante cada uno de los períodos capitalizables que estuvo impuesto?

Si el período k comienza en el momento $n - 1$ y acaba en el momento n , para obtener el interés I_k generado en ese período, calculamos la diferencia de los intereses acumulados hasta el momento n y los intereses generados hasta el período anterior $n - 1$.



El segmento BC correspondiente al interés compuesto generado en el período k , se obtiene restando el interés generado hasta el momento $n - 1$ (segmento AB), del interés generado hasta el momento n (segmento AC).

$$I_k = P[(1 + i)^n - 1] - P[(1 + i)^{n-1} - 1]$$

$$I_k = P[(1 + i)^n - 1 - (1 + i)^{n-1} + 1]$$

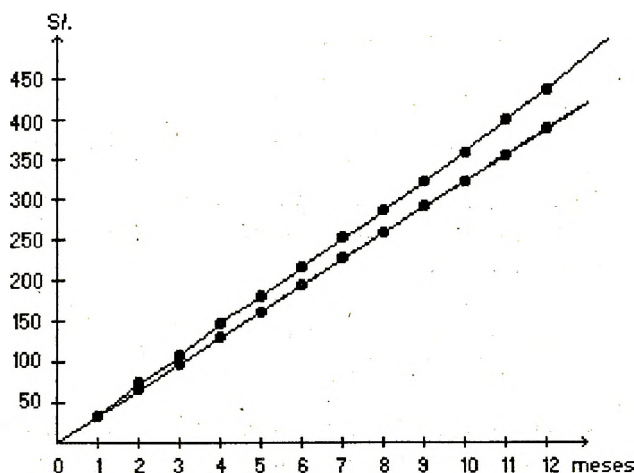
$$I_k = P(1 + i)^{n-1} [(1 + i) - 1]$$

$$I_k = Pi (1 + i)^{n-1} \quad (30).$$

Ejemplo 21.- Para demostrar "como crece el dinero del ahorrista", cuyo depósito inicial sería S/. 1 000 percibiendo una tasa nominal anual del 36% con capitalización mensual, calcule el interés que devengará ese capital en cada uno de los doce primeros meses. Grafique y compare los intereses acumulados en cada mes a interés simple y compuesto.

Solución

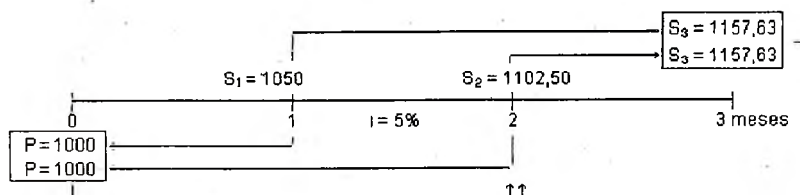
n	$Pi (1 + i)^{n-1}$	Int. Compuesto		Int. Simple	
		I_k	Acum.	I	I Acum.
1	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{1-1}$	30,00	30,00	30	30
2	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{2-1}$	30,90	60,90	30	60
3	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{3-1}$	31,83	92,73	30	90
4	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{4-1}$	32,78	125,51	30	120
5	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{5-1}$	33,77	159,27	30	150
6	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{6-1}$	34,78	194,05	30	180
7	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{7-1}$	35,82	229,87	30	210
8	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{8-1}$	36,90	266,77	30	240
9	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{9-1}$	38,00	304,77	30	270
10	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{10-1}$	39,14	343,92	30	300
11	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{11-1}$	40,32	384,23	30	330
12	$1000 \times 0,03 \times 1,03^{12-1}$	41,53	425,76	30	360



6. Ecuaciones de valor equivalente a interés compuesto

En el interés compuesto dos capitales ubicados en diferentes momentos de un horizonte temporal son equivalentes si a una fecha determinada sus respectivos valores (actualizados, capitalizados; o uno capitalizado y otro actualizado, etc.), aplicando en todos los casos la misma tasa de interés, son iguales.

Por ejemplo: considerando una tasa efectiva mensual del 5% y los capitales de S/. 1 050 y S/. 1 102,50 ubicados al final del mes 1 y final del mes 2, se pueden demostrar las siguientes equivalencias financieras:



- a) **Equivalencia financiera actualizando los flujos.** Los montos S_1 y S_2 son equivalentes en el momento 0 porque sus valores actualizados con la tasa i , son iguales (S/. 1 000).

$$1\,050,0/1,05^1 = 1000$$

$$1\,102,5/1,05^2 = 1000$$

- b) **Equivalencia financiera capitalizando los flujos.** Los montos S_1 y S_2 son equivalentes en el momento 3 porque sus valores capitalizados con la tasa i , son iguales (S/. 1 157,63).

$$1\,050,0 (1,05^2) = 1\,157,63$$

$$1\,102,5 (1,05^1) = 1\,157,63$$

- c) **Equivalencia financiera capitalizando P y actualizando S_3 .** Los importes P y S_3 son equivalentes en el momento 2 porque sus valores capitalizados y actualizados respectivamente con la tasa i , son iguales (S/. 1 102,50).

$$1\,000,00 (1,05^2) = 1\,102,5$$

$$1\,157,63 (1,05^{-1}) = 1\,102,5$$

- d) **Equivalencia financiera actualizando S_1 al momento 0.** El monto S_1 es equivalente a P porque su valor actualizado a la tasa i es igual a P (S/. 1 000).

$$1\,050 (1,05^{-1}) = 1\,000$$

Aplicando la misma tasa:

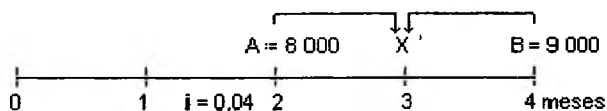
- Si dos capitales son equivalentes en una determinada *fecha focal o de evaluación*, también lo serán en cualquier otra fecha focal.
- Si dos capitales no son equivalentes en una determinada fecha focal, no lo serán en cualquier otra fecha.

Dada la importancia de la sustitución de capitales, tanto en el sistema financiero como en las diversas actividades mercantiles desarrollaremos algunas de las principales aplicaciones de ecuaciones de valor equivalentes.

6.1 Refinanciación de deudas sustituyéndolas por una sola

Ejemplo 22.- En la negociación sostenida por la empresa UNISA con el sectorista de crédito del Banco de Fomento, se aprobó un contrato para sustituir las deudas de esa empresa de S/. 8 000 y S/. 9 000 con vencimientos dentro de 2 y 4 meses respectivamente por un único pago con vencimiento a tres meses a una tasa anual del 48% con capitalización mensual. ¿Cuál será el importe del pago que deberá realizar UNISA en esa fecha?

Solución



Cuadro de posibles procedimientos

Momento	Ecuación de valor equivalente	Valor de X
0	$8\,000(1,04^{-2}) + 9\,000(1,04^{-4}) = X(1,04^{-3})$	16 973,85
1	$8\,000(1,04^{-1}) + 9\,000(1,04^{-3}) = X(1,04^{-2})$	16 973,85
2	$8\,000(1,04^0) + 9\,000(1,04^{-2}) = X(1,04^{-1})$	16 973,85
3	$8\,000(1,04^1) + 9\,000(1,04^{-1}) = X(1,04^0)$	16 973,85
4	$8\,000(1,04^2) + 9\,000(1,04^0) = X(1,04^1)$	16 973,85

Los problemas de equivalencia financiera pueden resolverse planteando ecuaciones de valor en cualquier fecha del horizonte temporal e incluso fuera de éste (mes -1, -2, 5, 6, etc), produciendo el mismo resultado; pero siempre habrá un planteamiento más sencillo, el cual se podrá visualizar de acuerdo a la experiencia del analista. En el presente problema la evaluación más simple sería en el momento 3, en donde el importe a cancelar en esa fecha es igual a la suma de los S/. 8 000 capitalizados y los S/. 9 000 actualizados, ambos flujos en un período.

En el cuadro de posibles soluciones se notará que cada ecuación a partir del momento 0, se obtiene multiplicando la ecuación anterior por $(1 + i)$, formando las equivalencias para los momentos 1, 2, 3 y 4; aunque también pueden

formarse ecuaciones equivalentes en los momentos - 1, - 2, - 3, etc y 5, 6, 7, etc. Representando $A = 8\,000$ y $B = 9\,000$ tenemos las siguientes ecuaciones equivalentes:

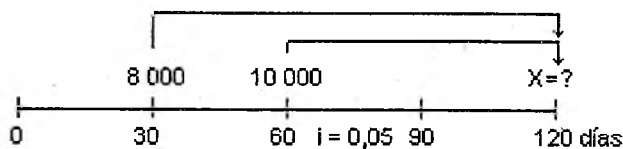
Cuadro de posibles procedimientos

Momento	Multiplicando	Ecuación equivalente
0		$A(1+i)^{-2} + B(1+i)^{-4} = X(1+i)^{-3}$
1	$(1+i)$	$A(1+i)^{-1} + B(1+i)^{-3} = X(1+i)^{-2}$
2	$(1+i)$	$A(1+i)^0 + B(1+i)^{-2} = X(1+i)^{-1}$
3	$(1+i)$	$A(1+i)^1 + B(1+i)^{-1} = X(1+i)^0$
4	$(1+i)$	$A(1+i)^2 + B(1+i)^0 = X(1+i)^1$

6.2 Diferimiento de pagos

Ejemplo 23.- La compañía Deportex debe pagar al Banco Comercial dos deudas de S/. 8 000 y S/. 10 000 cada una, la primera a 30 días y la segunda a 60 días. La Gerencia Financiera de Deportex, analizando su estado de flujo de caja proyectado, conoce de la futura falta de efectivo para esas fechas, por lo que negociando con el Banco Comercial se difieren los pagos para el día 120, a una tasa efectiva mensual del 5% (incluyendo mora). ¿Qué importe deberá pagar Deportex el día 120?

Solución



$$X = 8\,000(1,05^3) + 10\,000(1,05^2)$$

$$X = 20\,286$$

6.3 Consolidación de pasivos

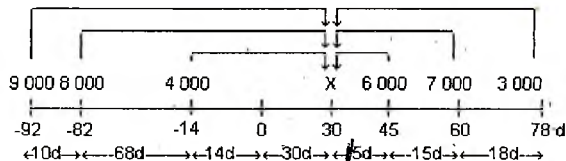
Ejemplo 24.- Actualmente, la empresa PALM, la cual mantiene varias líneas de financiamiento con diversos bancos del Sistema Financiero, tiene los créditos vencidos y por vencer resumidos en el cuadro siguiente:

Plazo	Banco	S/.	TEM	Línea
Vencido hace 92 días	A	9 000	5,0 %	Importaciones
Vencido hace 82 días	B	8 000	4,0 %	Pagaré
Vencido hace 14 días	C	4 000	4,5 %	Sobregiro
Por vencer dentro de 45 días	D	6 000	3,0 %	Pagaré
Por vencer dentro de 60 días	C	7 000	3,0 %	Letras
Por vencer dentro de 78 días	A	3 000	3,5 %	Importaciones

Debido a que las tasas de interés en mora son más elevadas que para los créditos por vencer, PALM ha tramitado y obtenido del Banco E un financiamiento para consolidar y amortizar sus pasivos vencidos y por vencer a una tasa efectiva mensual del 2,8%, el cual será desembolsado dentro de 30 días. ¿Qué importe deberá solicitar PALM al Banco E?

Solución

Designando el día de hoy como el momento 0, el tiempo transcurrido de los créditos vencidos tendrán signo negativo, mientras los créditos por vencer tendrán signo positivo.



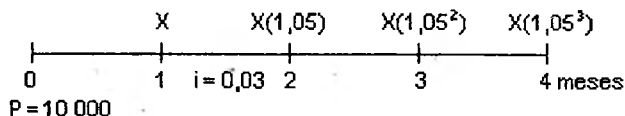
$$X = 9\,000 (1,05^{122/30}) + 8\,000 (1,04^{112/30}) + 4\,000 (1,045^{44/30}) + 6\,000 (1,03^{-15/30}) + 7\,000 (1,03^{-30/30}) + 3\,000 (1,035^{-48/30})$$

$$X = 40\,050,87$$

6.4 Cuotas de amortización de préstamos

Ejemplo 25.- Calcule el importe de cada cuota creciente a pagar por un préstamo bancario de S/. 10 000 amortizable en 4 cuotas mensuales vencidas las cuales se incrementarán 5% cada mes en relación a la cuota anterior. El banco cobra una tasa efectiva mensual del 3%.

Solución



$$10\,000 = X(1,03^{-1}) + X(1,03^{-2}) + X(1,03^{-3}) + X(1,03^{-4})$$

$$10\,000 = 3,717098403 X$$

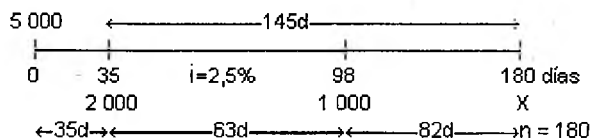
$$X = 2\,690,27$$

Cuota		Importe
1	X	2 690,27
2	X (1,05)	2 824,78
3	X (1,05 ²)	2 966,02
4	X (1,05 ³)	3 114,32

6.5 Amortizaciones parciales de préstamos

Ejemplo 26.- El Sr. Figueroa tomó en préstamo S/. 5 000 para devolverlos dentro de 180 días pagando una tasa nominal mensual del 2,5% con capitalización diaria. Si durante dicho período amortiza S/. 2 000 el día 35 y 1 000 el día 98, ¿cuánto deberá pagar el día 180 para cancelar su deuda: a) si los abonos efectuados se procesan el mismo día, b) si se toma como fecha focal el día 180?

Solución



a) Procesando los abonos el mismo día del pago

Día	Cálculo del valor futuro	Abonos	Saldos
35	$S_{35} = 5\,000,00(1 + 0,025/30)^{35} = 5\,147,92$	2 000,00	3 147,92
98	$S_{98} = 3\,147,92(1 + 0,025/30)^{63} = 3\,317,53$	1 000,00	2 317,53
180	$S_{180} = 2\,317,53(1 + 0,025/30)^{82} = 2\,481,36$	2 481,36	0,00
		5 481,36	

b) Procesando la deuda y (abonos) tomando como fecha focal el día 180

$5\,000(1 + 0,025/30)^{180} =$	5 808,81
$2\,000(1 + 0,025/30)^{145} =$	(2 256,76)
$1\,000(1 + 0,025/30)^{82} =$	(1 070,69)
Saldo a pagar	2 481,36

$$\text{Total pagos: } 2\,000 + 1\,000 + 2\,481,36 = 5\,481,36$$

A diferencia del interés simple, la ecuación de valor en el interés compuesto, en cualquier fecha focal, produce el mismo resultado.

6.6 Ventas a plazos (sistema de créditos)

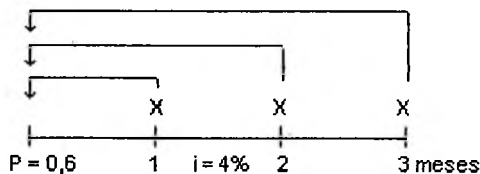
Ejemplo 27.- La compañía PICH, comercializadora de electrodomésticos, vende sus productos al contado contraentrega. Sin embargo, debido a que ha conseguido una línea de crédito para financiar sus ventas a plazos cargando una tasa efectiva mensual del 4%, ha solicitado a su gerencia financiera preparar una alternativa de ventas a crédito que incluya una cuota inicial del 40% sobre

el precio al contado y el saldo en cuotas mensuales iguales. Para el programa A, en 3 cuotas y para el programa B, en 4 cuotas. Calcule los factores a aplicar para ambos programas.

Solución

Con el objeto de aplicar el programa a cualquier artículo comercializado por PICH, se trabajará a nivel de una unidad monetaria S/. 1,00. Si el cliente paga el 40% como cuota inicial, la compañía sólo financia el 60% restante, entonces P en la ecuación de equivalencia es igual a S/. 0,60.

a) Programa a 3 meses

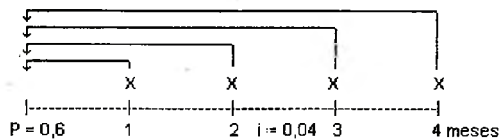


$$0,6 = X(1,04^{-1}) + X(1,04^{-2}) + X(1,04^{-3})$$

$$0,6 = X(2,775091033)$$

$$X = 0,2162091235 \quad \text{Factor a aplicar al precio de contado}$$

b) Programa a 4 meses



$$0,6 = X(1,04^{-1}) + X(1,04^{-2}) + X(1,04^{-3}) + X(1,04^{-4})$$

$$0,6 = X(3,629895224)$$

$$X = 0,1652940272 \quad \text{Factor a aplicar al precio de contado}$$

Programa de crédito

Cuota inicial:	precio de contado x 0,4
Importe de la cuota para 3 meses:	precio de contado x 0,2162091235
Importe de la cuota para 4 meses:	precio de contado x 0,1652940272

Aplicación

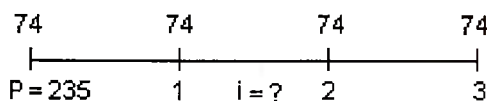
Suponiendo un artefacto con precio de contado de S/. 500 y financiado a 4 meses tenemos:

Cuota inicial:	$500 \times 0,4 = \text{S/. } 200,00$
4 cuotas:	$500 \times 0,1652940272 = 82,65$

6.7 Cálculo de la tasa de interés implícita cobrada en financiamientos

Ejemplo 28.- La firma CAL vende televisores al contado en \$ 235. Al crédito lo ofrece con una cuota inicial y 3 cuotas mensuales, las 4 cuotas de \$ 74 cada una. ¿Cuál es el la tasa de interés efectiva cargada en este financiamiento?

Solución



$$235 - 74 = \frac{74}{(1 + i)} + \frac{74}{(1 + i)^2} + \frac{74}{(1 + i)^3}$$

Calculando por interpolación $i = 17,96\%$

6.8 Evaluaciones a valor presente

Ejemplo 29.- La compañía Plástico ha convocado a un concurso de precios para adquirir una camioneta al crédito. A la convocatoria han respondido los proveedores A y B cuyas ofertas están resumidas en el siguiente cuadro

comparativo de precios. ¿Qué opción escogería usted si el costo del dinero es del 2% efectivo mensual?

Proveedor	Cuota inicial	Cuotas mensuales		
		1a	2a	3a
A	4 000	2 500,00	2 500,00	2 500,00
B	3 000	2 846,75	2 846,75	2 846,75

Solución

$$A = 4\,000 + 2\,500(1,02^{-1}) + 2\,500(1,02^{-2}) + 2\,500(1,02^{-3})$$

$$A = 11\,209,71$$

$$B = 3\,000 + 2\,846,75(1,02^{-1}) + 2\,846,75(1,02^{-2}) + 2\,846,75(1,02^{-3})$$

$$B = 11\,209,71$$

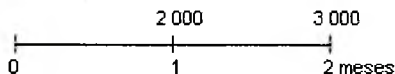
Ambas propuestas evaluadas a la tasa efectiva mensual del 2% son equivalentes financieramente. La decisión corresponderá entonces a la liquidez disponible y los flujos de caja futuros que dispondrá la persona que está ejecutando esta operación.

6.9 Cálculo del vencimiento común

Ejemplo 30.- El día de hoy la empresa Cosmos tiene dos deudas con el Banco del Norte de S/. 2 000 y 3 000 c/u, las cuales vencen dentro de 30 y 60 días respectivamente. Si Cosmos dispone de S/. 4 977,09 para cubrir ambas deudas, ¿en qué fecha debe efectuar ese pago para cancelar ambas deudas considerando que el banco cobra una tasa efectiva mensual del 5%?

Solución

Efectuando la evaluación en el presente tenemos la siguiente ecuación de equivalencia:



$$2\,000 (1,05^{-1}) + 3\,000 (1,05^{-2}) = 4\,977,09 (1,05^{-n})$$

$$4625,85034 = 4\,977,09 (1,05^{-n})$$

$$0,9294286407 = 1,05^{-n}$$

$$n = 1,5 \text{ meses}$$

7. Listado de fórmulas

$$S = P(1 + i)^n \quad (21) \quad \text{Monto}$$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^n \quad (22) \quad \text{Monto}$$

$$P = S(1 + i)^{-n} \quad (23) \quad \text{Capital}$$

$$i = \left(\frac{S}{P} \right)^{1/n} - 1 \quad (24) \quad \text{Tasa}$$

$$n = \frac{\text{Log}(S/P)}{\text{Log}(1 + i)} \quad (25) \quad \text{Tiempo}$$

$$I = P[(1 + i)^n - 1] \quad (26) \quad \text{Interés}$$

$$P = \frac{I}{(1 + i)^n - 1} \quad (27) \quad \text{Capital}$$

$$i = \left(\frac{I}{P} + 1 \right)^{1/n} - 1 \quad (28) \quad \text{Tasa}$$

$$n = \frac{\text{Log}(I/P + 1)}{\text{Log}(1 + i)} \quad (29) \quad \text{Tiempo}$$

$$Ik = P i (1 + i)^{n-1} \quad (30) \quad \text{Interés devengado en el período } k$$

8. Problemas propuestos

Monto

1. Calcular el monto a pagar dentro de 5 meses por un préstamo bancario de S/. 50 000 que devenga una tasa nominal anual del 36% con capitalización mensual. Rp. $S = S/. 57\,963,70$.
2. Calcular el importe capitalizado de un depósito a plazo de S/. 20 000 colocado durante 6 meses a una tasa nominal anual del 36% capitalizable diariamente. Rp. $S = S/. 23\,942,19$.
3. ¿Qué monto debe dejarse en letras con vencimiento dentro de 38 días, si después de descontarlas se requiere disponer de un importe neto de S/. 20 000, sabiendo que el banco cobra una tasa efectiva mensual del 3,5%. Rp. $S = S/. 20\,890,77$.
4. Asumiendo que la población actual es de 22 millones de habitantes y su tasa promedio de crecimiento neto anual es del 2,01%, ¿cuántos habitantes seremos dentro de año y medio? Rp. $S = 22,7$ millones.
5. El 1 de abril el precio de una materia prima fue de S/. 20 000 por tm. 45 días después se incrementó a S/. 22 000. ¿Cuál será el precio a pagar por el nuevo stock que lo renovaremos dentro de 180 días contados a partir del 1 de abril, si nuestro proveedor nos manifiesta que los precios se incrementarán periódicamente (cada 45 días) en el mismo porcentaje original? Rp. $S = S/. 29\,282$.
6. En el último semestre la gasolina ha venido incrementándose en 2% cada 18 días en promedio. De mantenerse esta tendencia, ¿cuánto costará un galón de gasolina dentro de un año, si el precio es hoy S/. 3,50? Rp. $S = S/. 5,20$.
7. Una persona abre una cuenta bancaria el 14 de abril con S/. 1 000 percibiendo una tasa nominal mensual del 4% con capitalización diaria. El 2 de mayo retira S/. 400, el 15 de mayo retira S/. 200 y el 3 de junio deposita S/. 100. ¿Qué monto acumuló desde la fecha de su depósito inicial hasta el 24 de junio, fecha en que canceló la cuenta? Rp. $S = S/. 561,84$.
8. Una empresa abre una cuenta corriente bancaria por la cual gana una tasa de interés efectivo mensual del 3% sobre sus saldos acredores y paga una tasa nominal mensual del 3% con capitalización diaria sobre sus saldos deudores (sobregiros bancarios). Calcule el monto de la cuenta al 31 de agosto, cuyo movimiento fue el siguiente:

Fecha	4/8	6/8	9/8	12/8	13/8	15/8	31/8
Depósito	10 000	5 000	3 000		30 000	9 000	15 000
Retiro		2 000		37 000			

Rpta. $S = S/. 33\,390,48$.

Monto con variación de tasas

9. Se ha suscrito un contrato de crédito por S/. 80 000 para cancelarlo dentro de 120 días, a la tasa efectiva mensual de mercado. Al vencimiento del plazo, la tasa efectiva mensual ha sufrido las siguientes variaciones: 5% durante 46 días, 4,5% durante 10 días y 4% durante 64 días. ¿Cuál es el monto a cancelar al vencimiento del crédito? Rp. $S = S/. 95\,124$.
10. El 6 de junio la empresa Agroexport S.A. compró en el Banco Platino un Certificado de Depósito a Plazo (CDP) a 90 días por un importe de S/. 20 000, ganando una tasa nominal anual del 24% con capitalización diaria, si el 1 de julio la tasa bajó al 18% anual, ¿cuál fue el monto que recibió Agroexport al vencimiento del plazo del CDP? Rp. $S = S/. 21\,007,62$.
11. Una deuda de S/. 1 000 con opción a renovarse automáticamente cada 30 días, debe cancelarse el 20 de setiembre. ¿Qué monto debe pagarse el 19 de diciembre si el contrato de crédito establece que por la primera renovación se carga una tasa efectiva mensual del 5%, por la segunda una tasa efectiva mensual del 6% y por la tercera una tasa efectiva mensual del 7%? Rp. $S = S/. 1\,190,91$.

Capital inicial, valor presente

12. Aplicando una tasa efectiva del 4% mensual calcule el valor presente de un importe de S/ 2 000 que genera una tasa de interés nominal anual del 24% capitalizable mensualmente, durante un trimestre. Rp. $P = S/. 1\,886,82$.
13. Hace 4 meses se colocó un capital al 3% efectivo mensual, lo que permitió acumular un monto de S/. 2 000. ¿Cuál fue el importe del capital original? Rp. $P = S/. 1\,776,97$.

14. ¿Cuánto debo invertir hoy para acumular S/. 20 000 dentro 120 días en una institución de crédito que paga una tasa nominal anual del 24% con capitalización diaria? Rp. $P = S/. 18\,462,82$.
15. ¿Cuánto podré disponer hoy, si me han descontado un paquete de 4 letras cuyos importes son S/. 2 000, 6 500, 8 000 y 7 500 las cuales vencen dentro de 15, 30, 45 y 60 días respectivamente? La tasa efectiva quincenal que cobra la entidad financiera es del 1%. Rp. $P = S/. 23\,324,20$.
16. ¿Cuál sería el precio de contado de un artículo ofertado al crédito con una cuota inicial de S/. 2 000 y 4 cuotas de S/. 500 cada una pagadera cada fin de mes? Se requiere ganar una tasa efectiva mensual del 3%. Rp. $P = S/. 3\,858,55$.
17. En el proceso de adquisición de una máquina se tienen las siguientes alternativas:
- a) Inicial de S/. 2 000 y 2 cuotas mensuales de S/. 2 000.
 - b) Inicial de S/. 1 520 y 3 cuotas mensuales del mismo importe de la cuota inicial.
- ¿Cuál es la mejor oferta considerando un costo de oportunidad del 3% efectivo mensual? Rp. La alternativa b) con un valor presente de S/. 5 819,49.
18. La empresa Indutrust en la adquisición de un grupo electrógeno está evaluando las siguientes propuestas:
- a) \$ 8 000 al contado.
 - b) Al crédito con una inicial de \$ 2 000 y 6 cuotas de \$ 1 200 c/u, con vencimiento cada 30 días.
- Considerando que Indutrust tiene una tasa de rentabilidad en dólares del 6% mensual, ¿que opción le conviene?, ¿por qué? Rp. Al crédito porque le representaría una inversión a valor presente de \$ 7 900,79.
19. Si he descontado una letra con valor nominal de S/. 3 000, la cual vence dentro de 38 días y la tasa efectiva mensual que cobra el banco es 2%, ¿cuál es el importe neto que me deben abonar? Rp. $P = S/. 2\,925,69$.
20. Una letra con valor nominal de S/. 50 000 ha sido descontada en un banco faltando 45 días para su vencimiento, a una tasa efectiva bimestral del 4%. Si la letra puede ser cancelada 15 días antes de su vencimiento, ¿cuál será el monto a pagar en esa fecha? Rp. $S = S/. 49\,512,14$.
21. Haciendo uso de una línea de descuento, el Banco Interamericano descontó a una empresa 2 letras cuyos valores nominales fueron de

- S/. 10 000 y S/. 20 000 siendo sus vencimientos dentro de 25 y 35 días respectivamente. ¿Cuál es el valor presente de ambas letras considerando una tasa efectiva trimestral del 9%? Rp. P = S/. 29 104,30.
22. El 8 de agosto el Banco Continental descontó a Exportaciones Tradicionales S.A. (Extasa), un pagaré con valor nominal de \$ 9 000 y con vencimiento el 7 de setiembre. Si la tasa efectiva anual durante ese período fue del 15%, ¿qué importe abonó el Banco Continental en la cuenta corriente de Extasa el 8 de agosto? Rp. \$ 8 895,79.

Valor presente con variaciones de tasas

23. El 24 de setiembre se efectuó un depósito en un banco percibiendo una tasa efectiva mensual del 4% la cual varió el 16 de octubre al 4,2% y al 4,5% el 11 de noviembre. El día de hoy, 25 de noviembre, el saldo de la cuenta es de S/. 6 500. ¿Qué importe se depositó originalmente? ¿Cuál fue la tasa acumulada? Rp. P = S/. 5 970,57; $i = 8,867288\%$.
24. Calcular el valor presente de un importe de S/. 15 000 que se recibirá dentro de 30 días, si la vigencia de la tasa efectiva mensual será 8 días al 2% y 22 días al 1,5%. Rp. P = S/. 14 758,97.
25. Los flujos de caja y las inflaciones mensuales proyectados por la empresa Agroexport S.A., se muestran en el cuadro adjunto. Calcule el valor presente de dichos flujos. Rp. P = S/. 10 685,71.

	0	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
Flujo de caja	2 000	2 000	2 200	2 400	2 500
Inflación mensual		2,00%	1,80%	1,60%	1,65%

Tasa de interés

26. Después de 3 meses de haber colocado un capital de S/. 3 000 se obtuvo un monto de S/. 3 500. ¿A qué tasa de interés efectivo mensual se colocó el capital? Rp. $i = 5,27266\%$ mensual.
27. Calcule la tasa de rentabilidad efectiva mensual de un bono comprado en S/. 2 000 y vendido al cabo de 90 días en S/. 2 315,25. Rp. $i = 5\%$ mensual.
28. ¿A qué tasa efectiva mensual una inversión de S/. 10 000 se convirtió en un monto de S/. 11 151,23 si fue colocada durante 67 días? Rp. $i = 5\%$.

29. Calcule la tasa de rentabilidad efectiva anual de un capital de S/. 5 000 que en el lapso de 88 días produjo un interés efectivo de S/. 500. Rp. $i = 47,684\%$.
30. La población de una ciudad se triplica cada 25 años. ¿Qué tasa de crecimiento promedio anual tiene? Rp. $4,49\%$.
31. Una persona deposita S/. 2 000 en el banco Norsur percibiendo una tasa efectiva mensual del 4% . En la misma fecha deposita S/. 5 000 en el banco Sumor percibiendo una tasa nominal anual del 48% con capitalización trimestral. Calcule la tasa efectiva mensual promedio que ganó por ambos depósitos durante 8 meses. Rp. $3,89\%$.
32. La empresa Jacobs tiene en un banco una deuda de S/. 10 000 que vence dentro de 48 días por la cual paga una tasa efectiva mensual del 3% . Además tiene otra deuda de S/. 15 000 por la cual paga una tasa efectiva mensual del 4% la cual vence dentro de 63 días. Jacobs propone pagar ambas deudas con el descuento de un pagaré con valor nominal de S/. 27 033 el mismo que vencerá dentro de 90 días. ¿Qué tasa efectiva mensual está cargando el banco a Jacobs? Rp. 5% .

Tiempo

33. Después de colocar un capital de S/. 1 000 a una tasa de interés efectiva del 4% mensual se ha obtenido un monto de S/. 1 500. ¿A qué tiempo se colocó el capital? Rp. $n = 10,34$ meses; 310 días.
34. ¿En cuántos días podré: a) triplicar y b) cuadruplicar un capital a la tasa efectiva anual del 50% ? Rp. a) $n = 975$ días; b) $n = 1 231$ días.
35. ¿En cuántos meses acumularé S/. 5 341,18 si he colocado un capital de S/. 5 000 en un banco que paga una tasa efectiva trimestral del 2% ? Rp. $n = 10$ meses.
36. ¿Cuánto tiempo será necesario para que un depósito de S/. 1 000 efectuado hoy y un depósito de S/. 1 500 que efectuaré dentro de 4 meses en un banco, ganando una tasa efectiva mensual del 4% se conviertan en S/. 4 000? Rp. $n = 10,30753475$ meses contados a partir del último depósito.
37. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que los intereses generados por un capital sean igual al mismo capital colocado a una tasa del 5% de interés efectivo mensual? Rp. $14,2066$ meses = 14 meses y 6 días.

38. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la relación entre un capital de S/. 8 000 colocado a una tasa del 4% efectivo mensual y su monto, sea de 4/10? Rp. $n = 23,36241894$ meses.
39. ¿En cuánto tiempo (contado desde el momento 0) un monto de S/. 6 000 sustituirá tres deudas de S/. 2 000; S/. 1 000 y S/. 3 000 c/u con vencimiento dentro de 30, 60 y 90 días respectivamente a una tasa efectiva mensual del 3%. Rp. 64, 64 días.
40. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que un capital de S/. 5 000 colocado a una tasa efectiva mensual del 6% iguale al monto producido por otro capital de S/. 8 000 colocado a una tasa efectiva mensual del 4%? Rp. $n = 24,67444448$ meses; 740 días.

Interés

41. Calcule el interés que ha producido un capital de S/. 7 000, a una tasa efectiva mensual del 1% por el período comprendido entre el 3 de abril y 6 de junio del mismo año. Rp. $I = \text{S/}. 150,18$.
42. ¿Cuánto de interés se pagará por un préstamo de S/. 6 000 que devenga una tasa efectiva trimestral del 2%? El crédito se ha utilizado durante 17 días. Rp. $I = \text{S/}. 22,49$.
43. Calcular el interés bimestral que habrá ganado un depósito de ahorros de S/. 5 000 colocado a una tasa nominal anual del 24% con capitalización trimestral. Rp. $I = \text{S/}. 198,05$.

Capital inicial

44. Si deseo ganar un interés de S/. 1 000 al término de 2 meses, ¿qué capital debo colocar en un banco que paga una tasa efectiva mensual del 1,5%? Rp. $P = \text{S/}. 33\,085,19$.
45. Una inversión efectuada en la Bolsa de Valores produjo un interés de S/. 1 300 durante 77 días; en ese lapso de tiempo la tasa acumulada fue del 5,4%. ¿Cuál fue el importe original de la inversión? Rp. $P = \text{S/}. 24\,074,07$.
46. La rentabilidad de un paquete accionario adquirido en Bolsa hace 23 días fue de S/. 500. La tasa efectiva acumulada en 30 días por las acciones de esa empresa fue de 3,9%. ¿Cuál fue el precio de adquisición del paquete accionario? Rp. $P = \text{S/}. 16\,797,64$.

Tasa de interés

47. ¿Qué tasa efectiva mensual debe aplicarse a un capital de S/. 5 000 para que produzca una ganancia de S/. 800 durante 4 meses? Rp. $i = 3,78\%$.
48. El 18 de enero la compañía Mari's compró en Bolsa un paquete accionario en S/. 90 000, el cual vendió el 26 de febrero obteniendo una rentabilidad neta de S/. 6 500. Calcule la tasa de rentabilidad efectiva mensual que obtuvo Mari's en esa operación. Rp. $i = 5,5106\%$.
49. ¿A qué tasa de interés efectiva anual debe colocarse un capital para que se duplique en 42 meses? Rp. $i = 21,9\%$.

Tiempo

50. ¿Cuántos días serán necesarios para que un capital de S/. 10 000 produzca un interés de S/. 1 000 a una tasa nominal anual del 24% con capitalización mensual? Rp. $n = 4,813006798$ meses; 144 días.
51. ¿En cuántos trimestres un capital de S/. 5 000 habrá ganado un interés S/. 306,04 colocado a una tasa nominal anual del 24% con capitalización mensual? Rp. $n = 1$.

Interés devengado en el período k

52. Un depósito de S/. 20 000 estuvo colocado durante 90 días ganando una tasa nominal anual del 36% con capitalización diaria. ¿Qué interés se ganó el día 46 y el día 87? Rp. día 46 = S/. 20,92; día 87 = S/. 21,80.
53. La compañía Ferrosal ha recibido un financiamiento bancario de S/. 10 000 para cancelarlo conjuntamente con los intereses acumulados dentro de 6 meses, pagando una tasa nominal anual del 24% capitalizable mensualmente. En la fecha del desembolso, el préstamo fue contabilizado de la siguiente manera:

Cargo		Abono	
Caja	10 000,00	Préstamo de terceros	11 261,62
Interés por devengar	1 261,62		

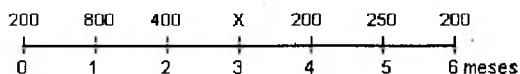
Calcule los importes de intereses a cargar mensualmente a gastos. Rp.
 Los intereses mensuales son: 200; 204; 208,08; 212,24; 216,49; 220,82;
 1 261,62.

54. Si a partir del tercer mes la tasa anual del problema anterior disminuye al 18% capitalizable mensualmente, calcule nuevamente los intereses generados por el préstamo en cada uno de los 6 meses que dura el financiamiento. Rp. Los intereses mensuales son: 200; 204; 208,08; 159,18; 161,57; 163,99; 1 096,82.
55. Calcule los intereses durante un año, que se devengarán mensualmente en un depósito a plazo de S/. 10 000 a una tasa anual del 12% con capitalización mensual. Rp. Interés acumulado anual: S/. 1 268,25; intereses devengados mensualmente: 100,00; 101,00; 102,01; 103,03; 104,06; 105,101; 106,152; 107,214; 108,286; 109,369; 110,462; 111,567.

Ecuaciones de valor equivalente

Refinanciación de deudas sustituyendo varias de ellas por una sola

56. La empresa exportadora Tejidos de Alpaca S.A ha conseguido la refinanciación de sus deudas vencidas y por vencer (según diagrama adjunto), pagando una tasa efectiva del 5% mensual. Calcule el importe a cancelar en el mes 3 que sustituya el total de sus obligaciones. Rp. $X = \text{S/. } 2\,123,53$.



57. Sustituir dos deudas de S/. 20 000 y S/. 30 000 con vencimiento dentro de 2 y 4 meses respectivamente por un único pago con vencimiento a 3 meses, asumiendo una tasa anual del 60% con capitalización mensual. Rp. $X = \text{S/. } 49\,571,43$.

Diferimiento de pagos

58. El 18 de abril el Gerente Financiero de la Empresa Sur S.A. estaba revisando los compromisos de pago de la cuenta Caja-Bancos para el mes de mayo, encontrando la siguiente información de vencimientos pendientes con el Banco Indufin: día 20 S/. 2 500 (pagaré); día 21 S/. 1 800 (letras); día 24 S/. 6 300 (préstamo) y día 28 S/. 3 500 (importaciones). Según información obtenida del flujo de caja, durante

el mes de mayo, el saldo proyectado será negativo por lo que solicita al Banco, el diferimiento de los pagos con vencimiento en mayo para el 16 de junio, aceptando pagar una tasa efectiva mensual del 5%. ¿Cuál es el importe que deberá cancelar Sur S.A. en esa fecha? Rp. $X = S/. 14\,639,93$.

59. En la fecha se depositan S/. 10 000 con el objeto de acumular S/. 20 000 dentro de 8 meses. El banco paga una tasa nominal anual del 36% con capitalización mensual. ¿Qué importe se deberá depositar el segundo mes para cumplir con el objetivo propuesto? Rp. $X = S/. 6\,140,69$.

Consolidación de pasivos

60. El 26 de mayo el Banco Fin-Norte aprobó un crédito para consolidar un conjunto de deudas vencidas y por vencer de la empresa Aquarium cuyo estado de cuenta a esa fecha era:
- a) créditos vencidos: el 10, 14 y 19 de mayo de S/. 2 500; S/. 3 100 y S/. 1 800 respectivamente
 - b) créditos por vencer: el 29 de mayo, 7 y 11 de junio de S/. 1 700; S/. 500 y S/. 4 500 respectivamente.

Considerando que el banco cobra una tasa efectiva mensual del 6% para los créditos vencidos y del 4% para los créditos por vencer, ¿qué importe financiará Fin-Norte el 26 de mayo si exige que Aquarium amortice el 40% de la deuda total (vencida y por vencer)? Rp. $X = S/. 8\,501,44$.

Cuotas de amortización de préstamos

61. Un préstamo de S/. 100 000 concedido a una tasa efectiva mensual del 2% debe cancelarse en 4 cuotas uniformes mensuales vencidas. Calcule el importe de cada cuota. Rp. $X = S/. 26\,262,38$.
62. La empresa Equipos S.A. vende sus máquinas al contado en \$ 10 000 pero debido a un financiamiento obtenido del exterior, está planeando efectuar ventas al crédito con una cuota inicial de \$ 5 000 y dos cuotas uniformes con vencimiento cada 30 días. La tasa efectiva anual a cargar al financiamiento es del 25%. Calcule el importe de las cuotas del programa de ventas a plazo. Rp. $X = S/. 2\,570,60$.
63. Un préstamo de S/. 5 000 es concedido por el Banco Fin-Oriente a la empresa Tubos S.A. cobrando una tasa efectiva mensual del 5%. El reembolso debe efectuarse en cinco cuotas con vencimiento cada 30 días,

de las cuales, las cuatro primeras serán de S/. 1 000 cada una. ¿A cuánto ascenderá la quinta cuota? Rp. $X = S/. 1\ 855,78$.

Amortizaciones parciales de préstamos

64. El 26 de mayo la compañía Pegaso S.A. descontó un pagaré con valor nominal de S/. 20 000, a una tasa efectiva mensual del 5% y con vencimiento el 10 de julio. ¿Cuánto deberá cancelar al vencimiento del pagaré, si el día 8 y 21 de junio Pegaso S.A. amortizó S/. 5 000 y S/. 7 000 respectivamente? Rp. S/. 7 513,22.

Ventas a plazos (sistema de créditos)

65. Prepare una alternativa de venta al crédito para una máquina cuyo precio al contado es \$ 10 000, bajo las siguientes condiciones: cuota inicial equivalente al 25% del precio de contado y seis cuotas uniformes con vencimiento cada 30 días. La tasa efectiva mensual es del 5% sobre el saldo deudor. Rp. Cuota inicial de \$ 2 500 y seis cuotas mensuales de \$ 1 477,63 c/u.

Cálculo de la tasa de interés implícita

66. ¿Cuál es la tasa efectiva mensual que está cargando el Banco Mercante por el financiamiento de un préstamo de S/. 20 000, el cual debe cancelarse con cuotas de S/. 5 380,54 cada fin de mes durante cuatro meses? Rp. $i = 3\%$.
67. La compañía Electrodomésticos S.A. está vendiendo Refrigeradoras al contado en \$ 900 y al crédito con una cuota inicial de \$ 207,28 y cinco armadas mensuales de \$ 160. El cliente Z desea adquirir el artefacto al crédito y acepta las condiciones generales del financiamiento, pero propone pagar en la cuarta cuota sólo \$ 100 y la diferencia cancelarla al vencimiento del plazo. ¿Cuál sería el importe de dicho pago considerando una tasa efectiva mensual del 5%? Rp. $X = \$ 223$.

Evaluaciones a valor presente

68. En el proceso de adquisición de una maquinaria se han recibido las siguientes propuestas:

- a) al contado por S/. 10 000,
- b) al crédito con una cuota inicial de S/. 4 000 y seis cuotas mensuales de S/. 1 100.

¿Qué opción aceptaría usted si el costo del dinero es del 4% efectivo mensual? Fundamente su respuesta. Rp. La opción b) con un VP = S/. 9 766,35.

69. En la fecha una empresa se dispone a pagar una deuda de S/. 5 000 vencida hace tres meses y otra deuda de S/. 2 000 que vencerá dentro de dos meses. Las deudas vencidas generan una tasa efectiva anual del 36% y las deudas vigentes generan una tasa nominal anual del 24% con capitalización trimestral. ¿Qué importe deberá cancelar la empresa? Rp. P = S/. 7 323,31.

Cálculo del vencimiento común

70. Una empresa tiene deudas con un banco cuyas fechas de vencimiento y montos son: 26.05 S/. 4 000; 18.06 S/. 5 000; 11.07 S/. 2 000 y 30.08 S/. 3 000. El 26.05 la empresa paga al banco su deuda de S/. 4 000 y le propone sustituir las 3 deudas restantes por un nuevo crédito de S/. 10 070,27 en reemplazo de todas las deudas pendientes. Considerando una tasa efectiva mensual del 5% y que el banco acepta la propuesta el mismo 26.05, ¿en qué fecha deberá vencer el nuevo crédito? Compruebe la respuesta con el dato obtenido. Rp. después de 53 días contados a partir del 26.05, el 18 de julio.

Problemas combinados

71. Calcule el importe del capital que colocado a una tasa efectiva mensual del 4% durante un trimestre, ha producido un monto que excede en S/. 500 al capital que se hubiese colocado durante ese mismo período a una tasa de interés simple del 48% anual. Rp. P = S/. 102 796,05.
72. Calcule el monto necesario para fabricar 5 000 artículos dentro de 6 meses cuyo costo unitario de fabricación hoy es de S/. 20 y se prevé incrementos mensuales del 2% durante el primer trimestre y del 3% durante el segundo trimestre. Rp. S = S/. 115 961,06.
73. Un capital colocado a una tasa efectiva durante 2 meses ha producido el mismo interés que si se hubiese colocado durante 75 días a interés simple. Calcule la tasa de interés. Rp. tasa = 50%.

74. Una persona deposita S/. 1 000 en una institución financiera que paga una tasa efectiva mensual del 5% con el objeto de retirar S/. 1 102,50 dentro de 2 meses. A los 24 días después de efectuado el depósito, la tasa efectiva mensual baja al 4%. ¿Qué tiempo adicional tendrá que esperar para retirar el monto requerido? Rp. 9 días adicionales. En el día 69 acumulará S/. 1 102,81.

Problemas de razonamiento matemático

75. Se tiene un capital de S/. 5 000. Una parte de él se coloca a una tasa de interés compuesto del 5% mensual durante 8 meses y el resto al 30% de interés compuesto anual durante 5 meses. Si ambos producen el mismo monto al final de su plazo respectivo, hallar el importe de los capitales colocados. Rpta. $P_1 = \text{S/. } 2\,151,04$; $P_2 = \text{S/. } 2\,848,96$.
76. Una deuda de S/. 10 000 fue pactada para devolverse en 4 pagos bimestrales proporcionales a 2, 4, 6 y 8. Calcule el importe de cada pago aplicando una tasa nominal anual del 36% con capitalización mensual. Rp. S/. 1 191,94; S/. 2 383,89; S/. 3 575,83; S/. 4 767,77.
77. Un matrimonio posee un capital de S/. 8 000. El esposo colocó una parte del capital en un banco a una tasa de interés efectivo mensual del 4% durante 8 meses y su esposa colocó en otra institución el resto del capital a una tasa de interés simple anual del 48% durante el mismo tiempo. Halle el importe invertido por cada uno de los esposos si ambos capitales produjeron el mismo monto. Rp. S/. 3 927,74; S/. 4 072,26.
78. Una empresa coloca los $\frac{4}{5}$ de un capital a una tasa de interés efectiva del 36% anual durante 9 meses y el saldo a una tasa nominal anual del 36% con capitalización semestral durante el mismo período de tiempo. Calcule el monto en función de P. Rp. $S = 1,263859563P$.
79. Una parte de un capital de S/. 4 000 ha sido colocado a una tasa nominal anual del 24% con capitalización trimestral y el saldo a una tasa de interés efectivo mensual del 2%, igualándose al cabo de 8 meses. Calcule el importe de cada una de las partes del capital. Rp. S/. 2 003,04; S/. 1 996,96.
80. Hoy se coloca un capital ganando una tasa nominal anual del 24% capitalizable trimestralmente. Transcurrido un año la tasa nominal anual disminuye al 20%, lo que motiva el retiro del 50% del capital colocado originalmente. Transcurridos seis meses de esta segunda operación se

retira el monto total el cual asciende a S/. 20 000. Calcule el capital inicial. Rp. P = S/. 23 791,66.

81. Si se coloca hoy S/. 4 000 y S/. 5 000 dentro de n meses, se podrá triplicar el segundo capital por concepto de capitalización de ambos importes, en un plazo total de $2n$ meses, ganando una tasa efectiva mensual del 2%. Calcule el plazo a que fueron colocados cada capital. Rp. 17.34544 meses y 34.69088 meses respectivamente.

9. Resumen del capítulo

El interés compuesto es una sucesión de operaciones a interés simple, donde el monto del primer período capitalizable constituye el capital inicial del segundo período y así sucesivamente hasta la finalización del plazo de la operación. Esto origina su crecimiento de carácter geométrico.

En el cálculo del interés compuesto es necesario tener en consideración la tasa utilizada. La misma puede ser nominal o efectiva, en este último caso la frecuencia de capitalización, la tasa y los períodos capitalizados deben estar expresados en la misma unidad de tiempo.

A diferencia del interés simple, donde las ecuaciones de valor equivalente deben realizarse tomando como fecha focal (día de evaluación), el final del plazo pactado, en el interés compuesto las ecuaciones de valor equivalente producen un mismo resultado independientemente de la fecha focal que se tome.

IV

Descuento

Introducción

Una *operación de descuento* consiste en obtener el pago anticipado de Títulos-Valores: letra de cambio, pagaré, u otros documentos, mediante la cesión o endoso del derecho del poseedor a otra persona, generalmente una institución de crédito, la cual paga el importe del documento deduciendo los intereses anticipadamente, por el tiempo que falta para el vencimiento de la obligación. El *descuento* constituye la diferencia entre el monto de una deuda a su vencimiento y el importe recibido en el presente.

Es necesario distinguir los diferentes conceptos del término *descuento* aplicados en el sistema financiero y en las actividades comerciales y mercantiles.

Clases de descuento		
Racional	Bancario	Comercial
Simple Compuesto	Simple Compuesto	Unitario Sucesivo

Simbología

D = Descuento

P = Valor presente o valor líquido del documento

S	=	Valor nominal del documento, valor futuro
n	=	Períodos de tiempo que faltan para el vencimiento del título-valor
i	=	Tasa de interés por período de tiempo aplicable sobre P
d	=	Tasa de descuento por período de tiempo aplicable sobre S

1. Descuento racional, matemático o verdadero

En una operación de descuento racional, el importe a recibir por el descontante es igual al valor presente del título-valor calculado con una tasa i . El valor líquido coincide con el valor presente.

1.1 Descuento racional simple

En una operación de descuento racional simple, el valor presente del título-valor, se calcula a interés simple.

$$D = S - P$$

Pero por (20)

$$P = \left[\frac{S}{1 + in} \right]$$

Reemplazando en la ecuación original

$$D = S - \frac{S}{1 + in}$$

$$D = S \left[1 - \frac{1}{1 + in} \right] \quad (31)$$

El término entre corchetes de (31) es igual a:

$$\frac{1 + in}{1 + in} - \frac{1}{1 + in} = \frac{in}{1 + in}$$

La ecuación (31) entonces también puede expresarse:

$$D = \frac{Sin}{1 + in} \quad (31')$$

El descuento en esta ecuación puede interpretarse como el interés aplicado a un valor futuro (Sin), traído a valor presente al dividirlo por $1 + in$.

1.1.1 Equivalencia del descuento racional simple y el interés simple

$$I = Pin$$

$$D = S \left[1 - \frac{1}{1 + in} \right] \quad \text{como} \quad S = P(1 + in)$$

$$D = P(1 + in) \left[1 - \frac{1}{1 + in} \right]$$

$$D = P(1 + in) \left[\frac{in}{1 + in} \right]$$

$$D = Pin$$

$$D = I$$

El descuento racional simple efectuado sobre un valor futuro produce el mismo resultado que el interés simple aplicado sobre su valor presente.

Ejemplo 1.- Una letra de S/. 3 800 con vencimiento el 26 de febrero es descontada el 18 de enero a una tasa de interés simple anual del 24%. Calcule el importe del descuento racional.

Solución

$$D = ?$$

$$S = 3800$$

$$i = 0,24$$

$$n = 39/360$$

$$D = S \left[1 - \frac{1}{1 + in} \right]$$

$$D = 3\,800 \left[1 - \frac{1}{1 + 0,24 \times 39/360} \right]$$

$$D = 96,30$$

Ejemplo 2.- Una letra de S/. 20 000 con vencimiento dentro de 60 días se descuenta hoy a una tasa nominal anual del 24%. Calcule: a) el descuento racional simple; b) su valor presente; c) el interés que se cobrará sobre el importe realmente desembolsado.

Solución

a) Cálculo del descuento

$D = ?$

$S = 20\ 000$

$i = 0,24$

$n = 60/360$

$$D = 20\ 000 \left[1 - \frac{1}{1 + 0,24 \times 60/360} \right] = 769,23$$

b) Cálculo del valor presente

$$P = \frac{S}{1 + in}$$

$$P = \frac{20\ 000}{1 + 0,24 \times 60/360} = 19\ 230,77$$

c) Cálculo del interés

$I = Pin$

$$I = 19\ 230,77 \times 0,24 \times 60/360 = 769,23$$

Ejemplo 3.- ¿Por qué valor nominal deberá aceptarse un pagaré con vencimiento dentro de 65 días pagando una tasa nominal anual del 18%? El pagaré será descontado racionalmente a interés simple y el importe neto requerido es de S/. 8 000.

Solución

$S = ?$

$n = 65/360$

$i = 0,18$

$P = 8\ 000$

$$S = P[1 + in]$$

$$S = 8\ 000[1 + 0,18 \times 65/360]$$

$$S = 8\ 260$$

Ejemplo 4.- En la fecha se tienen dos obligaciones de S/. 3 000 y S/. 4 000 que vencen dentro de 28 y 46 días respectivamente. ¿Cuál será el pago total por ambas obligaciones si deciden cancelarse hoy? El acreedor aplica una tasa anual de interés simple del 15% para la letra a 28 días y del 18% para la letra a 46 días.

Solución

$P = ?$

$S_1 = 3\,000$

$S_2 = 4\,000$

$n_1 = 28/360$

$n_2 = 46/360$

$i_1 = 0,15$

$i_2 = 0,18$

$$P = \frac{S_1}{1 + i n} + \frac{S_2}{1 + i n}$$

$$P = \frac{3\,000}{1 + 0,15 \times 28/360} + \frac{4\,000}{1 + 0,18 \times 46/360}$$

$$P = 6\,875,47$$

1.2 Descuento racional compuesto

En una operación de descuento racional compuesto, el valor presente del título-valor se calcula a interés compuesto.

$$D = S - P$$

Pero

$$P = S (1 + i)^{-n}$$

Entonces

$$D = S - S (1 + i)^{-n}$$

$$D = S[1 - (1 + i)^{-n}] \quad (32)$$

1.2.1 Equivalencia del descuento racional compuesto y el interés compuesto

$$I = P (1 + i)^n - 1$$

$$D = S [1 - (1 + i)^{-n}] \quad \text{como } S = P (1 + i)^n$$

$$D = P (1 + i)^n [1 - (1 + i)^{-n}]$$

$$D = P [(1 + i)^n - 1]$$

$D = I$

Ejemplo 5.- Calcule el descuento racional compuesto a practicarse a un pagaré con valor nominal de S/. 10 000 y vencimiento a 60 días. Utilice una tasa efectiva mensual del 4%.

Solución

$$\begin{aligned}
 D &= ? & D &= S [1 - (1 + i)^{-n}] \\
 S &= 10\,000 & D &= 10\,000 [1 - (1 + 0,04)^{-2}] \\
 i &= 0,04 & D &= 754,44 \\
 n &= 2 \text{ meses}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.- La empresa COMSA, comercializadora de útiles de escritorio, ha efectuado compras de mercaderías por un importe total de S/. 40 500 incluido el 18% de impuesto general a las ventas (IGV). ¿Qué importe de la factura puede utilizar para el crédito fiscal? Compruebe su respuesta.

Solución

$$\begin{aligned}
 D &= ? & D &= S [1 - (1 + i)^{-n}] \\
 S &= 40\,500 & D &= 40\,500 [1 - (1,18^{-1})] \\
 i &= 0,18 & D &= 6\,177,97 \\
 n &= 1
 \end{aligned}$$

Comprobación

Valor venta	34 322,03
IGV 18%	6 177,97
Precio de venta	40 500,00

Ejemplo 7.- ¿Por qué monto deberá aceptarse un pagaré con vencimiento a 60 días, para descontarlo racionalmente hoy, si se requiere disponer un importe de S/. 10 000? Utilice una tasa efectiva mensual del 4% y compruebe la respuesta.

Solución

$$\begin{aligned}
 S &= ? & \text{a) Valor nominal} & S = P (1 + i)^n \\
 n &= 2 & & S = 10\,000 (1 + 0,04)^2 = 10\,816
 \end{aligned}$$

$$i = 0,04$$

$$P = 10\,000 \quad \text{b) Descuento}$$

$$D = S [1 - (1 + i)^{-n}]$$

$$D = 10\,816 [1 - (1 + 0,04)^{-2}] = 816$$

Comprobación

Valor nominal	10 816
Descuento	(816)
Importe disponible	10 000

Ejemplo 8.- Calcule el importe disponible a obtenerse hoy por el descuento racional de un pagaré con valor nominal de S/. 8 000 y vencimiento dentro de 38 días. El banco cobra una tasa efectiva mensual del 5%, S/. 10 por gastos, S/. 5 de portes y efectúa además una retención del 10% sobre el valor presente del documento. Efectúe la liquidación.

Solución

$$P = ?$$

$$S = 8\,000$$

$$n = 38/30$$

$$i = 0,05$$

$$i' = 0,1$$

$$G = 15$$

$$S = P[(1 + i)^n + i'] + G$$

$$P = \frac{8\,000 - 15}{1,05^{38/30} + 0,1}$$

$$P = 6\,861,44$$

Liquidación		Importe
Valor nominal del pagaré		8 000,00
Descuento $6\,861,44[1,05^{38/30} - 1]$	437,42	
Gastos	10,00	
Portes	5,00	
Retención $6\,861,44 \times 0,1$	686,14	
Total deducciones		(1 138,56)
Importe disponible		6 861,44

Ejemplo 9.- En el ejemplo anterior ¿cuál será el importe que deberá cancelar el descontante al vencimiento del pagaré: a) si el importe retenido no gana interés, b) si el importe retenido gana una tasa efectiva mensual del 3%?

Solución

- a) Si el importe retenido no gana interés, al vencimiento de la obligación tendrá que abonarse el valor nominal del pagaré menos el importe de la retención que obra en poder del banco.

$$\text{Importe del pago} = 8\,000 - 686,14 = 7\,313,86$$

- b) Si el importe retenido gana una tasa efectiva mensual del 3% el importe del pago será:

$$\text{Importe del pago} = 8\,000 - [686,14(1,03^{38/30})] = 7\,287,68$$

Ejemplo 10.- El Comité de Descuentos del Banco Interandino aprobó hoy (7 de enero) a la empresa Transur su cartera de letras, de acuerdo a la siguiente relación:

Letra #	Venc.	Importe	Aceptante
420	01-02	6 348	Cargil
510	18-02	8 946	Transportec
586	23-02	9 673	Alitec

El banco cobra una tasa efectiva mensual del 5% y portes de S/. 5 por cada documento. ¿Cuál será el importe que dispondrá hoy Transur?

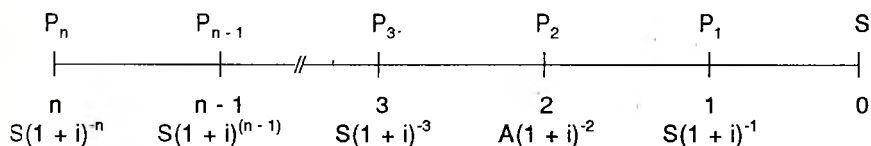
Solución

Letra #	Venc.	Días	Importe	Descuento	Neto
420	01-02	25	6 348	252,92	6 095,08
510	18-02	42	8 946	590,66	8 355,34
586	23-02	47	9 673	711,83	8 961,17
Totales					23 411,60
Portes					- 15,00
Importe disponible					23 396,60

1.2.2 Descuento racional compuesto D_k devengado en cada período de descuento

En una operación de descuento compuesto, los importes de los descuentos practicados al valor nominal del documento decrecen geométricamente en cada período de actualización. En este caso surge la pregunta ¿cuál es el importe descontado en cada período?

Partiendo del futuro para llegar al presente, deducimos la fórmula del descuento realizado en cualquier período k .



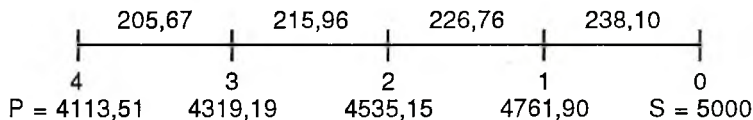
$$\begin{aligned}
 D_1 &= S - S(1+i)^{-1} &= S(1+i)^{-1}(1+i-1) &= S(1+i)^{-1}i \\
 D_2 &= S(1+i)^{-1} - S(1+i)^{-2} &= S(1+i)^{-2}(1+i-1) &= S(1+i)^{-2}i \\
 D_3 &= S(1+i)^{-2} - S(1+i)^{-3} &= S(1+i)^{-3}(1+i-1) &= S(1+i)^{-3}i \\
 &\vdots && \\
 D_n &= S(1+i)^{-(n-1)} - S(1+i)^{-n} &= S(1+i)^{-n+1}(1+i-1) &= S(1+i)^{-n}i \\
 &&&= S(1+i)^{-n}i
 \end{aligned}$$

Para un período k cualquiera, su respectivo descuento D_k puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$D_k = S i (1+i)^{-k} \quad (33)$$

Ejemplo 11.- Un pagaré cuyo valor nominal es S/. 5 000 y cuya fecha de vencimiento es el 29 de noviembre fue descontado faltando 120 días para su vencimiento, aplicando una tasa efectiva mensual del 5%. Calcule su valor presente y el descuento matemático realizado en cada período de 30 días.

Solución



- El 29 de noviembre vence el documento, su valor futuro de S/. 5 000 es el valor nominal o monto del pagaré.
- Al 30 de octubre faltan 30 días (1 período) para el vencimiento. El valor presente en esa fecha es 4 761,90 y su descuento es 238,10.
- Al 30 de setiembre faltan 60 días (2 períodos) para el vencimiento. El valor presente en esa fecha es 4 535,15 y su descuento es 226,76. El descuento acumulado es 464,86 (238,10 + 226,76).
- Los descuentos sucesivos se practican de modo similar a lo anterior.

Fecha	Días	Valor presente	Descto. mensual	Descto. acumulado
29-11	0	5 000,00	0,00	0,00
30-10	30	4 761,90	238,10	238,10
30-09	60	4 535,15	226,76	464,86
31-08	90	4 319,19	215,96	680,82
01-08	120	4 113,51	205,68	886,49

a) Cálculo del valor presente $P = S [1 - (1 + i)^{-n}]$

$$P = 5\,000 [(1 + 0,05)^{-4}] = 4\,113,51$$

b) Cálculo de los descuentos periódicos $D = Si (1 + i)^{-k}$

$$k = 1 \quad D_1 = 5\,000 \times 0,05 (1 + 0,05)^{-1} = 238,10$$

$$k = 2 \quad D_2 = 5\,000 \times 0,05 (1 + 0,05)^{-2} = 226,76$$

$$k = 3 \quad D_3 = 5\,000 \times 0,05 (1 + 0,05)^{-3} = 215,96$$

$$k = 4 \quad D_4 = 5\,000 \times 0,05 (1 + 0,05)^{-4} = 205,68$$

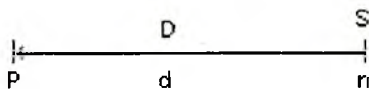
2. Descuento bancario

El descuento bancario constituye el *interés calculado sobre el valor nominal o valor futuro* (S) de un título-valor, importe a deducir del monto del documento para encontrar su *valor líquido*, el cual va a representar el verdadero

importe financiado. La tasa de interés aplicada es conocida como tasa adelantada o tasa de descuento "d", la cual se diferencia de la tasa vencida "i" en que ésta se aplica sobre P, y aquélla sobre S, lo que origina un importe líquido menor al valor presente del documento.

2.1 Descuento bancario simple

El descuento bancario simple es el producto del valor nominal del documento, la tasa de descuento y el número de períodos que faltan para el vencimiento de la operación.



Por definición:

$$D = Sdn \quad (34)$$

De la fórmula (34) obtenemos:

$$S = \frac{D}{dn} \quad (35) \quad d = \frac{D}{Sn} \quad (36) \quad n = \frac{D}{Sd} \quad (37)$$

Ejemplo 12.- Calcule el descuento bancario simple al 3 de marzo, sobre un documento con valor nominal de S/. 5 000 y fecha de vencimiento el 15 de abril. La tasa de descuento mensual es del 5%.

Solución

$$D = ?$$

$$S = 5\,000$$

$$d = 0,05$$

$$n = 43/30$$

$$D = Sdn$$

$$D = 5\,000 \times 0,05 \times 43/30$$

$$D = 358,33$$

Ejemplo 13.- Determine el valor nominal de un pagaré cuyo importe del descuento bancario ha sido S/. 500. La operación se ha efectuado con una tasa mensual de descuento simple del 5% en un período de 45 días.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 S = ? & S = D/dn \\
 D = 500 & S = 500/(0,05 \times 45/30) \\
 d = 0,05 & S = 6\,666,66 \\
 n = 45/30 &
 \end{array}$$

Ejemplo 14.- Calcule la tasa de descuento bancario simple aplicada a un pagaré de valor nominal S/. 6 666,66 y cuyo descuento ha sido S/. 500 en un período de 45 días.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 d = ? & d = D/Sn \\
 S = 6\,666,67 & d = 500/(6\,666,67 \times 45/30) \\
 D = 500 & d = 0,05 \\
 n = 45/30 &
 \end{array}$$

Ejemplo 15.- ¿A cuántos días se ha efectuado el descuento bancario de un pagaré con valor nominal de S/. 4 000, utilizando una tasa de descuento simple mensual del 4%, si se recibió un importe líquido de S/. 3 500?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 n = ? \text{ días} & n = D/Sd \\
 S = 4\,000 & n = 500/(4\,000 \times 0,04/30) \\
 d = 0,04/30 & n = 93,75 \\
 D = 500 & n = 94 \text{ días aproximadamente}
 \end{array}$$

2.1.1 Cálculo del valor líquido

$$\begin{array}{l}
 P = S - D \quad \text{como } D = Sdn \\
 P = S - Sdn
 \end{array}$$

$P = S(1 - dn) \quad (38)$

El *valor líquido* de un documento descontado bancariamente es el importe que recibe el descontante por el documento. En una operación de descuento

bancario, el valor líquido es menor a su respectivo valor presente, porque ha sido obtenido aplicando una tasa de descuento sobre el monto o valor nominal del documento, el cual necesariamente es mayor al importe realmente recibido por el descontante.

Ejemplo 16.- ¿Cuál será el valor líquido a obtener por el descuento bancario de una letra con valor nominal de S/. 2 000? La letra se descontó 38 días antes de su vencimiento con una tasa de descuento simple mensual del 5%.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 P = ? & P = S(1 - dn) \\
 S = 2\,000 & P = 2\,000(1 - 0,05 \times 38/30) \\
 d = 0,05 & P = 2\,000 \times 0,9366666667 \\
 n = 38/30 & P = 1\,873,33
 \end{array}$$

2.1.2 Cálculo del valor nominal

Despejando S de (38)

$$S = P \left[\frac{1}{1 - dn} \right] \quad (39)$$

Ejemplo 17.-¿Por qué monto deberá girarse una letra originada por una venta de un artículo al crédito cuyo precio de contado es S/. 1 500? La financiación es a 60 días y sin cuota inicial. La letra se someterá al descuento bancario simple a una tasa de descuento mensual del 4%.

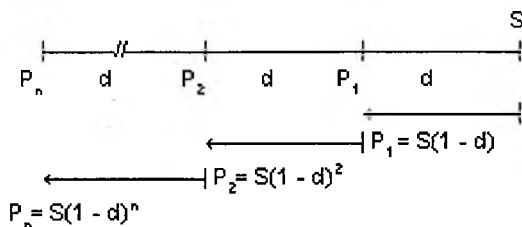
Solución

$$\begin{array}{ll}
 S = ? & S = P[1/(1 - dn)] \\
 P = 1\,500 & S = 1\,500[1/(1 - 0,04 \times 2)] \\
 n = 2 & S = 1\,630,43 \\
 d = 0,04 &
 \end{array}$$

2.2 Descuento bancario compuesto

El descuento bancario compuesto consiste en una serie de cálculos de descuentos simples donde, en primer término, se aplica el descuento por un período sobre el valor nominal de la deuda a su vencimiento, encontrando su valor líquido al final del primer período (evaluando de derecha a izquierda), o al comienzo del segundo período. A este valor obtenido se aplica el descuento por segunda vez encontrando su valor líquido pagadero dentro de dos períodos y así sucesivamente para todos los períodos del horizonte temporal, comprendido entre la fecha que se hace efectivo el abono del importe líquido del documento y la fecha del vencimiento de la deuda.

2.2.1 Cálculo del valor líquido



$$P_1 = S - Sd = S(1 - d)$$

$$P_2 = P_1 - P_1 d = P_1 (1 - d) = S(1 - d)(1 - d) = S(1 - d)^2$$

$$P_3 = P_2 - P_2 d = P_2 (1 - d) = S(1 - d)^2 (1 - d) = S(1 - d)^3$$

$$P_n = P_{n-1} - P_{n-1} d = P_{n-1} (1 - d) = S(1 - d)^{n-1} (1 - d) = S(1 - d)^n$$

$$P = S(1 - d)^n \quad (40)$$

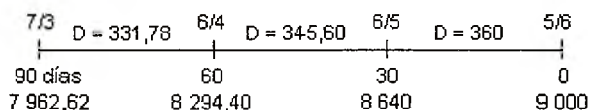
Ejemplo 18- El 7 de marzo la empresa Entursa, correntista del Banco Americano, aceptó un pagaré de S/. 9 000 con vencimiento a 90 días. ¿Cuál fue el valor líquido que Entursa recibió en esa fecha si la tasa nominal anual de descuento fue 48%, con período de descuento bancario cada 30 días?

Solución

$$\begin{aligned}
 P &= ? & P &= S(1 - d)^n \\
 S &= 9\,000 & P &= 9\,000(1 - 0,04)^3 \\
 n &= 3 & P &= 7\,962,62 \\
 d &= 0,48/12
 \end{aligned}$$

Ejemplo 19.- En el ejemplo anterior, considere que la compañía Entursa está preparando un informe mensual de las cargas financieras originadas en sus diversos préstamos vigentes, por lo que requiere conocer el importe de los descuentos mensuales generados en torno a su pagaré descontado el 7 de marzo. Calcule dichos importes.

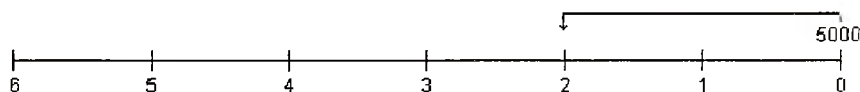
Solución



Fecha	Días	Valor líquido	Descto. mensual	Descto. acum.
05-06	0	9 000,00		0,00
06-05	30	8 640,00	360,00	360,00
06-04	60	8 294,40	345,60	705,60
07-03	90	7 962,62	331,78	1 037,38

Ejemplo 20.- Un pagaré con valor nominal de S/. 5 000 se descuenta bancariamente 6 meses antes de su vencimiento aplicando una tasa adelantada del 18% anual con capitalización mensual. ¿Qué importe debe pagarse para cancelarlo 2 meses antes de su vencimiento?

Solución



$$P = ? \qquad P = S(1 - d)^n$$

$$\begin{aligned} S &= 5\,000 \\ n &= 2 \\ d &= 0,18/12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 5\,000(1 - 0,015)^2 \\ P &= 4\,851,13 \end{aligned}$$

2.2.2 Cálculo del valor nominal

Despejando S de (40)

$$S = P (1 - d)^{-n} \quad (41)$$

Ejemplo 21.- La empresa Texnor requiere disponer un valor líquido de S/. 5 000. Para tal efecto utiliza su línea de descuento de pagarés, ¿cuál debe ser el valor nominal del documento con vencimiento a 60 días y a una tasa nominal anual del 48% con período de descuento bancario mensual?

Solución

$$\begin{aligned} S &= ? \\ P &= 5\,000 \\ n &= 2 \\ d &= 0,48/12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= P(1 - d)^{-n} \\ S &= 5\,000(1 - 0,04)^{-2} \\ S &= 5\,425,35 \end{aligned}$$

2.2.3 Cálculo del descuento bancario compuesto

$$\begin{aligned} D &= S - P \quad \text{como } P = S(1 - d)^n \\ D &= S - S(1 - d)^n \end{aligned}$$

$$D = S[1 - (1 - d)^n] \quad (42)$$

Ejemplo 22.- Halle el descuento bancario compuesto de una letra cuyo valor nominal es S/. 7 000 y vence dentro de 45 días. La tasa nominal anual es 36% con período de descuento mensual.

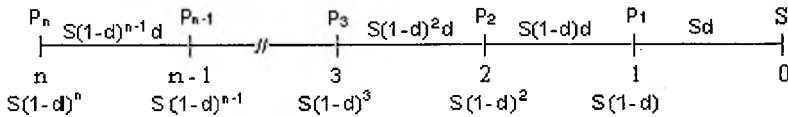
Solución

$$\begin{aligned} D &= ? \\ S &= 7\,000 \\ n &= 1,5 \\ d &= 0,36/12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= S[1 - (1 - d)^n] \\ S &= 7\,000[1 - (1 - 0,03)^{1,5}] \\ S &= 312,63 \end{aligned}$$

2.2.4 Descuento bancario compuesto D_k devengado en cada período de descuento

En forma similar al descuento racional D_k es posible calcular el descuento bancario compuesto D_k devengado en cada período de descuento. Para un período k cualquiera, su respectivo descuento D_k puede calcularse con la siguiente fórmula:

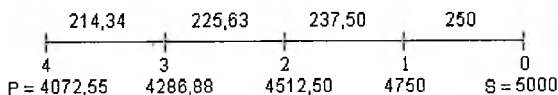


Cuando	Descuento	Valor líquido
$k = 1$	$D_1 = Sd$	$P_1 = S - Sd = S(1 - d)$
$k = 2$	$D_2 = S(1 - d)d$	$P_2 = S(1 - d) - S(1 - d)d = S(1 - d)^2$
$k = 3$	$D_3 = S(1 - d)^2d$	$P_3 = S(1 - d)^2 - S(1 - d)^2d = S(1 - d)^3$
\vdots	\vdots	
$k = n$	$D_n = S(1 - d)^{n-1}d$	$P_n = S(1 - d)^n$

$$D_k = Sd(1 - d)^{k-1} \quad (43)$$

Ejemplo 23.- Un pagaré cuyo valor nominal es S/. 5 000 y cuya fecha de vencimiento es el 29 de noviembre fue descontado bancariamente faltando 120 días para su vencimiento, aplicando una tasa anual adelantada del 60% con capitalización mensual. Calcule su valor presente y el descuento realizado en cada período de 30 días.

Solución



Fecha	Días	Valor líquido	Desccto. mensual	Desccto. acum.
29-11	0	5 000,00	0,00	0,00
30-10	30	4 750,00	250,00	250,00
30-09	60	4 512,50	237,50	487,50
31-08	90	4 286,88	225,63	713,13
01-08	120	4 072,53	214,34	927,47

a) Cálculo del valor presente

$$P = S (1 - d)^n$$

$$P = 5\,000 (1 - 0,05)^4 = 4\,072,53$$

b) Cálculo de los descuentos periódicos

$$D = Sd (1 - d)^{k-1}$$

$$k = 1 \quad D_1 = 5\,000 \times 0,05 (1 - 0,05)^{1-1} = 250,00$$

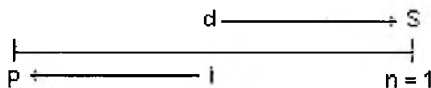
$$k = 2 \quad D_2 = 5\,000 \times 0,05 (1 - 0,05)^{2-1} = 237,50$$

$$k = 3 \quad D_3 = 5\,000 \times 0,05 (1 - 0,05)^{3-1} = 225,63$$

$$k = 4 \quad D_4 = 5\,000 \times 0,05 (1 - 0,05)^{4-1} = 214,34$$

3. Consideraciones entre la tasa "i" y la tasa "d"

La tasa de interés "i" y la tasa de descuento "d" sirven para calcular el rendimiento de una unidad monetaria por una unidad de tiempo desde diferentes momentos dentro de un horizonte temporal, ya que mientras la tasa "i" se aplica a un valor presente "P", la tasa "d" se aplica a un valor futuro "S", esto origina que el valor líquido del descuento bancario sea menor al valor presente del descuento racional. Cuando las tasas son bajas, la diferencia entre "i" y "d" no es importante, pero cuando las tasas son altas las diferencias son considerables.



$$\text{Descuento Racional } D = Pi$$

$$\text{Descuento Bancario } D = Sd$$

Ejemplo 24.- Compare los descuentos compuestos: racional y bancario de un documento con valor nominal de S/. 10 000 y vencimiento a 90 días utilizando:
a) una tasa anual del 5% con capitalización mensual; b) una tasa anual del 60% con capitalización mensual.

Solución

a) Utilizando una tasa del 5% anual

$D = ?$	Descuento racional $D = S[1 - (1 + i)^{-n}]$
$S = 10\,000$	$D = 10\,000[1 - (1 + 0,05/12)^{-3}] = 123,97$
$n = 3 \text{ meses}$	
$i = 0,05/12$	Descuento bancario $D = S[1 - (1 - d)^n]$
$i = 0,6/12$	$D = 10\,000[1 - (1 - 0,05/12)^3] = 124,47$

b) Utilizando una tasa del 60% anual

Descuento racional $D = S[1 - (1 + i)^{-n}]$
$D = 10\,000[1 - (1 + 0,60/12)^{-3}] = 1\,361,62$
Descuento bancario $D = S[1 - (1 - d)^n]$
$D = 10\,000[1 - (1 - 0,60/12)^3] = 1\,426,25$

Puede observarse en un horizonte temporal de 3 meses la pequeña diferencia entre el descuento racional y bancario a una tasa anual del 5% (S/. 0,50 sobre un monto de S/. 10 000); mientras en el mismo período, ante una tasa anual elevada del 60%, la diferencia es considerable (S/. 64,63), originando un menor abono al cliente en el caso del descuento bancario.

4. Descuento comercial

El descuento comercial es la rebaja concedida sobre el precio de lista de un artículo. Se llama descuento unitario cuando se practica sólo una vez y descuento sucesivo cuando existe más de un descuento sobre el mismo artículo.

Simbología

D_c = Descuento comercial

d = Tasa de descuento expresada en tanto por uno

PV = Precio de venta

PR = Precio rebajado

4.1 Descuento comercial unitario

Es el resultado de aplicar por una sola vez una determinada tasa sobre el precio de venta de un determinado artículo. Por ejemplo, el descuento de un artículo cuyo precio de venta es S/. 1 000 al que se le aplica una tasa del 10%, será de S/. 100 y el precio rebajado será S/. 900.

Designando los importes por las siglas anotadas anteriormente, tenemos el siguiente cuadro:

(1) PV	(2) d	(3) = (1) x (2) Dc	(4) = (1) - (3) PR
1 000	0,1	100	900
PV	d	PV(d)	$PV - PV(d) = PV(1 - d)$

De donde se infiere la siguiente fórmula de descuento comercial:

$$Dc = PV(d) \quad (44)$$

Y el precio rebajado:

$$PR = PV(1 - d) \quad (45)$$

4.2 Descuento comercial sucesivo

Cuando se aplican diferentes tasas de descuento, el primero sobre el precio original de venta y los siguientes sobre los precios ya rebajados, entonces se tienen descuentos sucesivos. El desarrollo de los descuentos sucesivos puede explicarse con el siguiente ejemplo. Suponga que un artículo tiene un precio de venta de S/. 1 000 a los que se aplican sucesivamente descuentos del 10% y 5%, entonces los cálculos serán:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
PV	d_1	(1) x (2) Dc_1	(1) - (3) PR_1	d_2	(4) x (5) Dc_2	(4) - (6) PR_2
1 000	0,1	100	900	0,05	45	855
PV	d_1	$PV(d_1)$	$PV - PV(d_1) =$ $PV(1 - d_1)$	d_2	$PV(1-d_1)d_2$	$PR_1 - Dc_2 =$ $PV(1 - d_1)(1-d_2)$

El descuento comercial sucesivo total es igual a la diferencia del precio de venta original y el último precio rebajado:

$$Dc = PV - PR_n$$

$$Dc = PV - PV(1 - d_1) (1 - d_2) \dots (1 - d_n)$$

Factorizando tenemos:

$$Dc = PV[1 - (1 - d_1) (1 - d_2) \dots (1 - d_n)] \quad (46)$$

El término entre corchetes representa la tasa de descuento acumulada.

Último precio rebajado

El último precio rebajado después de haber otorgado un conjunto de descuentos sucesivos se obtiene con la siguiente fórmula:

$$PR_n = PV[(1 - d_1) (1 - d_2) \dots (1 - d_n)] \quad (47)$$

Ejemplo 25.- Por campaña de quincena, una tienda de autoservicios ofrece el descuento del 20% + 15% en todos los artículos para automóviles. Si un cliente compra una batería cuyo precio de lista es S/. 120, calcule: a) el descuento total; b) la tasa de descuento acumulada; c) el precio rebajado a pagar; d) efectúe la liquidación de la facturación.

Solución

a) Descuento total

$$Dc = 120[1 - (1 - 0,2) (1 - 0,15)] = 38,40$$

b) Tasa de descuento acumulada

$$d = [1 - (1 - 0,2)(1 - 0,15)] = 0,32 = 32\%$$

c) Precio rebajado

$$PR = 120[(1 - 0,2)(1 - 0,15)] = 81,60$$

d) Facturación

Precio de venta	120,00
Descuento 20%	-24,00
Subtotal	96,00
Descuento 15%	-14,40
Total	81,60

Ejemplo 26.- Un equipo electrodoméstico comercializado por SIGA S.A. tiene un precio de S/. 2 500. En la fecha que el cliente X acude para su compra encuentra que el equipo se ha incrementado en 25%, pero sobre este precio se otorga una rebaja en 10%. a) ¿El conjunto de precios aumentó o disminuyó y en qué porcentaje total?; b) ¿cuál será el importe de la facturación?; c) efectúe la liquidación con los incrementos y rebajas.

Solución

a) Tasa de descuento o (aumento) acumulada

$$d = [1 - (1 + 0,25)(1 - 0,1)] = -0,125 = 12,5\% \text{ de aumento}$$

El precio tiene un aumento neto del 12,5%

b) Importe de la facturación

$$(2\ 500)1,125 = 2\ 812,50$$

c) Facturación

Precio original	2 500,00
Aumento 25%	625,00
Subtotal	3 125,00
Descuento 10%	-312,50
Total	2 812,50

5. Listado de fórmulas**Descuento racional simple**

$$D = S \left[1 - \frac{1}{1 + in} \right] \quad (31) \quad \text{Descuento}$$

$$D = \frac{Sin}{1 + in} \quad (31') \quad \text{Descuento}$$

Descuento racional compuesto

$$D = S[1 - (1 + i)^{-n}] \quad (32) \quad \text{Descuento}$$

$$D_k = Si(1 + i)^{-k} \quad (33) \quad \text{Descuento devengado en el período } k$$

Descuento bancario simple

$$D = Sdn \quad (34) \quad \text{Descuento}$$

$$S = \frac{D}{dn} \quad (35) \quad \text{Valor nominal del documento}$$

$$d = \frac{D}{Sn} \quad (36) \quad \text{Tasa de descuento}$$

$$n = \frac{D}{Sd} \quad (37) \quad \text{Tiempo}$$

$$P = S(1 - dn) \quad (38) \quad \text{Valor líquido del documento}$$

$$S = P \left[\frac{1}{1 - dn} \right] \quad (39) \quad \text{Valor nominal del documento}$$

Descuento bancario compuesto

$$P = S(1 - d)^n \quad (40) \quad \text{Valor líquido del documento}$$

$$S = P(1 - d)^{-n} \quad (41) \quad \text{Valor nominal del documento}$$

$$D = S[1 - (1 - d)^n] \quad (42) \quad \text{Descuento}$$

$$D_k = Sd(1 - d)^{k-1} \quad (43) \quad \text{Descuento devengado en el período } k$$

Descuento comercial

$$Dc = PV(d) \quad (44) \quad \text{Unitario}$$

$$PR = PV(1 - d) \quad (45) \quad \text{Precio rebajado}$$

$$Dc = PV[1 - (1 - d_1)(1 - d_2) \dots (1 - d_n)] \quad (46) \quad \text{Sucesivo}$$

$$PR_n = PV[(1 - d_1)(1 - d_2) \dots (1 - d_n)] \quad (47) \quad \text{Precio rebajado con descuentos sucesivos}$$

6. Problemas propuestos

Descuento racional simple

1. Calcule el descuento racional de un pagaré al día 26 de abril cuya fecha de vencimiento es el 30 de mayo, su valor nominal es S/. 10 000 y la tasa de interés simple anual es del 30%. Rp. D = S/. 275,53.
2. Un pagaré con valor nominal de S/. 10 800 es descontado racionalmente el 6 de junio, obteniéndose un valor presente de S/. 10 000. Halle la fecha de vencimiento del documento considerando una tasa mensual de interés simple del 4%. Rp. 60 días, vence el 5 de agosto.
3. Dos letras de S/. 5 000 y 8 000 cada una con vencimientos a 30 y 45 días son descontadas al 12% y 15% anual respectivamente. Calcule el importe total del descuento simple racional. Rp. D = S/. 196,74.
4. Faltando 50 días para su vencimiento, se descuenta una letra cuyo valor nominal es de S/. 7 200. Calcule el importe del descuento racional simple aplicando una tasa nominal anual del 24%. Rp. D = S/. 232,26.
5. El día de hoy, 15 de enero, se descuentan 3 letras cuyos valores nominales son de S/. 7 200, S/. 6 000, y S/. 8 300. Siendo los vencimientos el 16, 20 y 22 de febrero respectivamente, calcule el importe total del descuento racional simple a una tasa nominal anual del 24%. Rp. D = S/. 469,09.
6. Un pagaré con valor nominal de S/. 6 000 vence el 14 de abril. Se descuenta el 1 de marzo. ¿Qué importe se recibirá en esta fecha aplicando un descuento racional simple a una tasa nominal anual del 24%? Rp. P = S/. 5 829,02.

Descuento racional compuesto

7. Calcule el importe del descuento racional compuesto de un pagaré de S/. 8 000 el cual vence dentro de 4 meses, si es descontado mensualmente a la tasa nominal anual del 18%. Rp. D = S/. 462,53.
8. Calcule el descuento racional compuesto a practicarse hoy, a una letra con valor nominal de S/. 15 000 la cual vence dentro de 42 días. La tasa activa vigente es del 1,5% efectiva mensual. Rp. D = S/. 309,42.
9. Calcule el importe total del descuento racional a practicarse hoy a 2 pagarés con vencimiento a 30 y 60 días cada uno y cuyos valores nominales son de S/. 4 000 y S/. 5 000 respectivamente. La institución

- financiera cobra una tasa nominal anual del 12% con capitalización trimestral. Rp. $D = S/ . 136,78$.
10. Calcule el descuento racional efectuado a un pagaré faltando 60 días para su vencimiento aplicando tasa nominal anual del 36% con capitalización mensual. Su valor nominal es de S/. 5 000. Rp. S/. 287,02.

Descuento racional compuesto D_k devengado en cada período de descuento

11. Un pagaré cuyo valor nominal es S/. 7 000 y cuya fecha de vencimiento es el 11 de julio fue descontado racionalmente faltando 180 días para su vencimiento, aplicando una tasa nominal anual del 36% con capitalización cada 30 días. Calcule el descuento realizado en el tercer y quinto período. Rp. $D_3 = S/. 192,18$; $D_5 = S/. 181,15$.

Descuento bancario simple

12. Una letra de S/. 5 000 se descuenta a una tasa del 12% anual faltando 38 días para su vencimiento. Halle el descuento bancario simple. Rp. $D = S/. 63,33$.
13. El descuento bancario simple de un título-valor, faltando 43 días para su vencimiento ha sido de S/. 425 a una tasa de descuento anual del 15%, ¿cuál fue su valor nominal? Rp. $S = S/. 23 720,93$.
14. El descuento bancario simple de una letra que vence dentro de 72 días es de S/. 230 al 1% mensual. Halle el valor nominal de la letra. Rp. $S = 9 583,33$.
15. Por una letra de S/. 5 000 que vence dentro de 52 días se ha efectuado un descuento bancario simple S/. 260. Calcule la tasa mensual de descuento aplicada. Rp. $d = 3\%$.
16. Una letra presentada al descuento sufrió una disminución de su valor nominal del 3,5% faltando 60 días para su vencimiento. ¿Cuál fue la tasa anual simple de descuento bancario simple aplicada? Rp. $d = 21\%$.
17. ¿Por cuántos días se ha efectuado el descuento bancario de una letra de S/. 5 000 por la cual se recibió S/. 4 860? La tasa mensual de descuento simple fue del 2%. Rp. $n = 42$ días.
18. ¿Cuántos meses falta para el vencimiento de una letra de S/. 4 000 si se recibió S/. 3 910, después de haberla descontado a una tasa anual de descuento simple del 18%? Rp. $n = 1,5$ meses.

Valor líquido del descuento bancario simple

19. Calcule el valor líquido de un pagaré de S/. 9 000 sometido a descuento bancario simple faltando 65 días para su vencimiento, a una tasa anual del 12%. Rp. $P = S/. 8\ 805$.
20. Un banco carga una tasa de descuento bancario simple del 12% anual en sus operaciones. Si la empresa Horizonte S.A. acepta un pagaré de S/. 6 000 a 70 días, ¿qué importe líquido recibirá del banco? Rp. $P = S/. 5\ 860$.
21. ¿Qué importe líquido tendrá un pagaré con valor nominal de S/. 5 000 sometido a descuento bancario simple aplicando una tasa del 2% mensual, 3 meses antes de su vencimiento. Rp. $P = S/. 4\ 700$.

Valor nominal de un título valor en el descuento bancario simple

22. ¿Por qué importe deberá girarse una letra que vencerá el 27 de febrero, para obtener un importe líquido de S/. 5 000 el 19 de enero, descontándola bancariamente a una tasa de descuento simple anual del 18%? Rp. $S = S/. 5\ 099,44$.
23. ¿Cuál ha sido el valor nominal de una letra, la cual descontada 37 días antes de su vencimiento a una tasa de descuento bancario simple mensual del 2% ha permitido obtener un valor líquido de S/. 6 700. Rp. $S = S/. 6\ 869,45$.

Valor líquido del descuento bancario compuesto

24. Calcule el valor líquido a obtener por una letra de S/. 5 000, descontada mensualmente a una tasa de descuento bancario compuesto del 1,5% faltando 52 días para su vencimiento. Rp. $P = S/. 4\ 870,72$.
25. Calcule el importe líquido a disponer hoy (19 de enero), por 2 letras de S/. 4 500 y S/. 7 800 con vencimientos el 20 y 26 de febrero respectivamente. El banco las ha descontado a una tasa de descuento bancario compuesto del 2% mensual. Rp. $P = S/. 12\ 006,99$.
26. Un pagaré con valor nominal de S/. 5 000 y que vence dentro de 4 meses ha sido descontado bancariamente aplicando una tasa de descuento anual del 36% con capitalización mensual para el primer mes y del 48% anual con capitalización mensual para los últimos 3 meses. ¿Cuál será su valor líquido? Rp. $P = S/. 4\ 290,97$.

Valor nominal de un título valor en el descuento bancario compuesto

27. Hoy necesito disponer de S/. 20 000. ¿Por qué importe debo aceptar un pagaré que será descontado bancariamente a 60 días, a una tasa anual del 9% con período de descuento mensual? Rp. $S = S/. 20\,303,41$.
28. En el financiamiento de un auto cuyo precio de contado es de \$ 10 000 la institución financiera exige al cliente una cuota inicial de \$ 4 000 y el saldo sobre el precio de contado, es financiado con un pago adelantado de \$ 1 000 y una letra a 90 días por \$ 5 312,41 en la cual le han cargado una tasa de descuento bancario compuesto mensual del 2%. Si el cliente solicita que el importe de los \$ 1 000 se incluyan en la letra a 90 días, ¿cuál será el nuevo valor nominal de la letra? Rp. $S = \$ 6\,374,89$.
29. El precio de venta de un artículo es de S/. 1 750. ¿Por cuánto tendríamos que ofertarlo para promocionar un descuento del 10% sobre dicho precio. Rp. $S = S/. 1\,944,44$.
30. El descuento bancario compuesto de un pagaré de S/. 20 000 con vencimiento a 90 días ha producido un valor líquido de S/. 18 823,84 liquidando el descuento mensualmente. Determine la tasa nominal anual de descuento aplicada. Rp. $d = 24\%$ anual.
31. Determine el tiempo que falta para el vencimiento de una letra de S/. 5 000, la que descontada bancariamente a una tasa de descuento del 12% anual liquidando los descuentos mensualmente, ha producido un valor líquido de S/. 4 938,40. Rp. $n = 1,233443391$ meses, 37 días.

Descuento bancario compuesto

32. Un pagaré con valor nominal de S/. 5 000 se descuenta bancariamente a una tasa del 24% anual con capitalización mensual, 3 meses antes de su vencimiento. Calcule los descuentos de cada mes. Prepare el cuadro de los descuentos periódicos. Rp. S/. 100; S/. 98; S/. 96,04.
33. Calcule el descuento bancario compuesto efectuado en una letra de S/. 2 500 faltando 37 días para su vencimiento si al título-valor se le aplicó una tasa anual del 18% con período de descuento mensual. Rp. $D = S/. 46,17$.
34. Cuál será el importe del descuento bancario compuesto de un pagaré de S/. 7 000 con vencimiento a 110 días si se aplicó una tasa anual del 12% con período de descuento trimestral. Rp. $D = S/. 255,80$.

Descuento bancario compuesto D_k devengado en cada período de descuento

35. Un pagaré cuyo valor nominal es S/. 3 000 y cuya fecha de vencimiento es el 3 de noviembre fue descontado faltando 180 días para su vencimiento, aplicando una tasa nominal adelantada del 36% con capitalización mensual. Calcule el descuento bancario realizado en el tercer y quinto mes. Rp. $D_3 =$ S/. 84,68; $D_5 =$ S/. 79,68.

Descuento comercial unitario

36. Calcule el descuento a efectuar sobre el precio de venta de un artículo cuyo precio es S/. 1 000 y la rebaja concedida es del 5%. Rp. $D =$ S/. 50.
37. Calcule el importe de los descuentos comerciales que se efectuarán en una venta a plazo amortizable con pagos mensuales de S/. 100 que vencen el 1 de cada mes, otorgando los siguientes descuentos: a) 5% por adelantos a los vencimientos y b) 2% si los pagos se efectúan hasta el día 7 de cada mes. Rp. a) S/. 5; b) S/. 2.
38. La empresa El Buen Vestir S.A. vende sus artículos adicionando un margen de utilidad del 20% sobre el costo de la mercadería. Por cambio de temporada piensa rematar el stock de chompas cuyo costo unitario es de S/. 50 rebajando su margen del 20% al 5% sobre el costo. ¿Que descuento puede anunciar como "oferta" sobre el precio anterior? Rp. La oferta es rebajada de S/. 60,00 a 52,50.

Descuento comercial sucesivo

39. ¿Cuál será la tasa de descuento comercial total si una tienda concede sobre su mercadería una rebaja del 10% + 8% + 5%. Rp. 21,34%.
40. La compañía Supermercados por aniversario está concediendo descuentos sobre los precios de venta de sus productos de 20% + 15% + 5%. Si la familia Martínez efectúa una compra de S/. 320 a) ¿Cuál será el descuento total? b) ¿Cuál es la tasa de descuento total? Rp. a) S/. 113,28; b) 35,4%.

Precio neto con descuentos sucesivos

41. Con los datos del problema anterior calcule directamente el precio de venta rebajado. Rp. PR = S/. 206,72.
42. Calcule el equivalente de un aumento del 20% y una rebaja del 15% sucesivos. Compruebe su respuesta con una liquidación supuesta. Rp. = -2%. El equivalente es un aumento en precios del 2% .
43. ¿Cuál debe ser el precio de venta de una mercadería que fue adquirida a un precio de S/. 20 al que se le aplicó un descuento comercial del 15% + 10% con el objeto de obtener una utilidad del 30% sobre el costo? Rp. S/. 19,89.

7. Resumen del capítulo

Las operaciones financieras de descuento consisten en anticipar el pago de títulos-valores, generalmente letras de cambio y pagarés, deduciendo anticipadamente los intereses por el tiempo que falta hasta el vencimiento de la obligación.

Cuando el descuento se efectúa sobre el valor actual del documento o importe efectivamente recibido por el descontante, se denomina racional, en este caso se da la igualdad entre interés y descuento pudiéndose aplicar las fórmulas del interés simple o compuesto según las tasas sean simples o efectivas.

Cuando el descuento se calcula sobre el valor nominal del título-valor, el cual constituye su valor futuro, se denomina bancario; este cálculo origina un importe líquido menor a su valor actual. La tasa aplicada al valor nominal del documento es conocida como tasa adelantada.

El descuento comercial es la rebaja concedida sobre el precio de lista de un producto y puede ser unitario o sucesivo. En este último caso, los descuentos son concedidos en cada oportunidad sobre los saldos obtenidos previamente.

V

Tasas utilizadas en el sistema financiero

Introducción

Una *tasa* T es la razón de la diferencia de dos cantidades de la misma especie y una de ellas tomada como base; la cual debe ser necesariamente el sustraendo de la diferencia. Designando C_o a la base y C_n a la otra cantidad referida a la base, podemos expresar la tasa T como:

$$T = \frac{C_n - C_o}{C_o} = \frac{C_n}{C_o} - \frac{C_o}{C_o}$$

$$T = \frac{C_n}{C_o} - 1 \quad (48)$$

Las tasas se expresan en tanto por uno, tanto por ciento, tanto por mil, etc; cuyas expresiones son:

- % equivalente a centésimos, tanto por ciento
- ‰ equivalente a milésimos, tanto por mil
- ‰/100 equivalente a diez milésimos, tanto por diez mil

Para convertir una tasa dada en tanto por uno, a un tanto por cuanto, se multiplica dicha tasa por 100, 1 000 o más y al resultado se le agrega el signo %, ‰, ‰‰, etc, respectivamente. Por ejemplo, el 25% expresado en tanto por uno o tanto por mil se representa:

Tanto por uno	Tanto por ciento	Tanto por mil
0,25	25%	250 ‰
$0,25/1 = 0,25$	$25/100 = 0,25$	$250/1000 = 0,25$

lo que indica 25 céntimos de un sol; 25 soles de 100 soles y 250 soles de mil soles respectivamente.

Una tasa refleja una variación en forma neta, mientras que un *Índice* (In), refleja la relación existente entre las cantidades.

$$In = \frac{C_n}{C_o} \quad (49)$$

El siguiente ejemplo aclarará la diferencia entre índice y tasa.

Ejemplo 1.- La compañía LIDEL al 30 de abril y 31 de mayo ha registrado ventas de S/. 9 000 y S/. 9 450 respectivamente y su producción para el mismo período ha sido 7 500 y 6 000 unidades. Tomando como base el 30 de abril calcule los índices y las tasas de variación de ventas y producción.

Solución



a) Índice de variación de ventas I_v , índice de variación de producción I_p

$$I_v = \frac{9\,450}{9\,000} = 1,05 \quad I_p = \frac{6\,000}{7\,500} = 0,8$$

b) Tasa de variación de ventas T_v , tasa de variación de producción T_p

$$T_v = \frac{9\,450}{9\,000} - 1 = 0,05 \quad T_p = \frac{6\,000}{7\,500} - 1 = -0,2$$

I_v indica que en mayo se han vendido en unidades monetarias el 105% con relación a abril, mientras la producción alcanzó sólo el 80% con relación al mes anterior. Ello significa una tasa de crecimiento del 5% en ventas y un decrecimiento del 20% en producción.

Ejemplo 2.- Desarrolle el mismo ejemplo No. 1 pero tomando como base el 31 de mayo.

Solución



$$a) I_v = \frac{9\,000}{9\,450} = 0,9524 \quad I_p = \frac{7\,500}{6\,000} = 1,25$$

$$b) T_v = \frac{9\,000}{9\,450} - 1 = -0,0476 \quad T_p = \frac{7\,500}{6\,000} - 1 = 0,25$$

El índice de ventas nos indica que en abril se han vendido en unidades monetarias el 95,24% con relación a mayo, mientras la producción alcanzó el 125% con relación al mes posterior (mayo), lo que significa una tasa de decrecimiento del 4,76% en ventas y un crecimiento del 25% en producción.

Tasa de interés

Aplicando la definición de tasa, la tasa de interés i que refleja la variación de un capital P el que se ha convertido en un monto S después de un período de tiempo es igual a:

$$i = \frac{S - P}{P}$$

Pero $S - P = I$, entonces

$$i = \frac{I}{P} \quad (50)$$

Por ejemplo, si un banco concedió un préstamo de S/. 10 000 por 90 días cobrando un interés de S/. 1 000, la tasa efectiva del trimestre ha sido:

$$i = \frac{1\,000}{10\,000} = 0,1 = 10\%$$

En relación a las tasas de interés, el Banco Central de Reserva del Perú de acuerdo con su Ley Orgánica, Decreto Ley 26123 de 92.12.29, tiene las siguientes atribuciones y obligaciones:

- art. 51 El Banco establece de conformidad con el Código Civil, las *tasas máximas* de interés compensatorio, moratorio y legal, para las operaciones ajenas al Sistema Financiero. Las mencionadas tasas, así como el Índice de Reajuste de Deudas y las tasas de interés para las obligaciones sujetas a este sistema, deben guardar relación con las tasas de interés prevaletientes en las entidades del sistema financiero.
- art. 52 El Banco propicia que las tasas de interés de las operaciones del Sistema Financiero sean determinadas por la libre competencia, dentro de las tasas máximas que fije para ello en ejercicio de sus atribuciones. Excepcionalmente, el Banco tiene la facultad de fijar tasas de intereses máximas y mínimas con el propósito de regular el mercado.

En el sistema financiero los productos transados son colocaciones y captaciones, cuyo costo denominado tasa de interés se fija de acuerdo a las reglas del mercado, bajo la regulación y supervisión de Organismos especializados, creados de acuerdo a Ley.

Existe una terminología muy variada para designar las diversas tasas de interés vigentes en el sistema financiero, muchas de ellas representando el mismo concepto a pesar de tener diferentes denominaciones. Trataremos de agrupar, clasificar y definir esas tasas, en función de algún elemento común que las una.

Clasificación de las tasas

Activa Pasiva	Según el balance bancario
Nominal y proporcional Efectiva y equivalente	Por el efecto de la capitalización
Vencida Adelantada	Según el momento del cobro de intereses
Compensatoria Moratoria Tasa de interés total en mora	De acuerdo al cumplimiento de la obligación
TAMN Tasa Activa Moneda Nacional TAMEX Tasa Activa Moneda Extranjera	Según el tipo de moneda
TIPMN Tasa de Interés Pasiva M.N. TIPMEX Tasa de Interés Pasiva M.E.	
De inflación Real Corregida por inflación (inflada)	Considerando la pérdida del poder adquisitivo
Discreta Continua	Por el tipo de capitalización
Explícita Implícita	De acuerdo a su anuncio en la operación
Tasa de Interés Legal Tasa de Interés Moratorio TIM	Para operaciones no financieras

1. Tasa activa

Son operaciones activas todas aquellas formas técnicas mediante las cuales los bancos utilizan o aplican los fondos recolectados y cuyos montos quedan expresados en los distintos rubros del activo de sus balances: fondos disponibles, colocaciones, inversiones, otras cuentas del activo. Se puede decir también que son operaciones activas todas aquellas formas técnicas por las cuales los bancos mantienen disponible, colocan o invierten los fondos provenientes de sus operaciones pasivas.

3. Tasa nominal y tasa proporcional

Se dice que una *tasa es nominal* cuando:

- a) Se aplica directamente a operaciones de interés simple.
- b) Es susceptible de proporcionalizarse (dividirse o multiplicarse) j/m veces en un año, para ser expresada en otra unidad de tiempo equivalente, en el interés simple; o como unidad de medida para ser capitalizada n veces en operaciones a interés compuesto. Donde m es el número de capitalizaciones en el año.

La proporcionalidad de la tasa nominal anual puede efectuarse directamente a través de una regla de tres simple considerando el año bancario de 360 días. Por ejemplo ¿cuál será la tasa proporcional diaria y mensual correspondiente a una tasa nominal anual del 24%? La tasa diaria será $0,066\% = (24/360)$ y la tasa mensual será $2\% = 30(24/360)$.

Ejemplo 3.- Calcular la tasa proporcional:

- a) Trimestral, a partir de una tasa nominal anual del 24%
- b) Trimestral, a partir de una tasa nominal semestral del 12%
- c) Mensual, a partir de una tasa nominal trimestral del 12%
- d) De 18 días, a partir de una tasa nominal anual del 18%
- e) De 88 días, a partir de una tasa nominal trimestral del 6%
- f) Anual, a partir de una tasa nominal mensual del 2%
- h) De 46 días, a partir de una tasa nominal bimestral del 6%
- i) De 128 días, a partir de una tasa nominal mensual del 2%

Solución

- a) $(0,24/360)90 = 0,06 = 6,00\%$
- b) $(0,12/180)90 = 0,06 = 6,00\%$
- c) $(0,12/90)30 = 0,04 = 4,00\%$
- d) $(0,18/360)18 = 0,009 = 0,90\%$
- e) $(0,06/90)88 = 0,0586 = 5,87\%$
- f) $(0,02/30)360 = 0,24 = 24\%$
- h) $(0,06/60)46 = 0,046 = 4,60\%$
- i) $(0,02/30)128 = 0,0853 = 8,53\%$

4. Tasa efectiva

La *tasa efectiva* i para n períodos de capitalización puede obtenerse a partir de una *tasa nominal anual* j capitalizable m veces en el año, de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^n - 1 \quad (51)$$

La *tasa efectiva* refleja el número de capitalizaciones para operaciones pasivas o liquidaciones para operaciones activas. En el interés compuesto los intereses capitalizados vuelven a ganar intereses, efecto conocido como anatocismo.

Para un mismo horizonte temporal, cuando las *tasas nominal* y *efectiva* coinciden, los rendimientos obtenidos a interés simple y compuesto son iguales.

Por ejemplo, el monto simple de un capital de S/. 1 000 a una *tasa nominal anual* del 24% y el monto compuesto del mismo capital a una *tasa efectiva anual* del 24% arrojan un monto de S/. 1 240:

$$\begin{array}{ll} \text{Monto simple} & S = 1\,000(1 + 0,24 \times 1) = 1\,240 \\ \text{Monto compuesto} & S = 1\,000(1 + 0,24)^1 = 1\,240 \end{array}$$

La *tasa efectiva* i y la *tasa nominal* j para diferentes unidades de tiempo pueden abreviarse del siguiente modo:

Unidad de tiempo	i	j
Anual	TEA	TNA
Semestral	TES	TNS
Cuatrimestral	TEC	TNC
Trimestral	TET	TNT
Bimestral	TEB	TNB
Mensual	TEM	TNM
Quincenal	TEQ	TNQ
Diaria	TED	TND

Ejemplo 4.- Calcule la TES para un depósito de ahorro que gana una TNA del 24% abonándose mensualmente los intereses en la libreta de ahorros.

Solución

TES = ?

j = 0,24

m = 12

n = 6

$$TES = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n - 1$$

$$TES = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^6 - 1 = 0,1261662 = 12,62\%$$

Ejemplo 5.-Tomando como base una TNA del 18% con capitalización: anual, semestral, cuatrimestral, trimestral, bimestral, mensual, quincenal y diaria calcule sus respectivas tasas efectivas anuales y tasas efectivas semestrales.

Solución

Tasa efectiva anual

j Anual	Capitalización	Operación	TEA
18%	Anual	$(1 + 0,18/1)^{360/360} - 1 = 0,18$	18,00%
18%	Semestral	$(1 + 0,18/2)^{360/180} - 1 = 0,1881$	18,81%
18%	Cuatrimstral	$(1 + 0,18/3)^{360/120} - 1 = 0,191016$	19,10%
18%	Trimestral	$(1 + 0,18/4)^{360/90} - 1 = 0,192518601$	19,25%
18%	Bimestral	$(1 + 0,18/6)^{360/60} - 1 = 0,194052297$	19,41%
18%	Mensual	$(1 + 0,18/12)^{360/30} - 1 = 0,195618171$	19,56%
18%	Quincenal	$(1 + 0,18/24)^{360/15} - 1 = 0,196413529$	19,64%
18%	Diaria	$(1 + 0,18/360)^{360/1} - 1 = 0,197163508$	19,72%

Tasa efectiva semestral

j Anual	Capitalización	Operación	TES
18%	Anual	$(1 + 0,18/1)^{180/360} - 1 = 0,086278049$	8,62%
18%	Semestral	$(1 + 0,18/2)^{180/180} - 1 = 0,09$	9,00%
18%	Cuatrimstral	$(1 + 0,18/3)^{180/120} - 1 = 0,091336795$	9,13%
18%	Trimestral	$(1 + 0,18/4)^{180/90} - 1 = 0,092025$	9,20%
18%	Bimestral	$(1 + 0,18/6)^{180/60} - 1 = 0,092727$	9,27%
18%	Mensual	$(1 + 0,18/12)^{180/30} - 1 = 0,093443264$	9,34%
18%	Quincenal	$(1 + 0,18/24)^{180/15} - 1 = 0,093806898$	9,38%
18%	Diaria	$(1 + 0,18/360)^{180/1} - 1 = 0,094149673$	9,41%

En este ejemplo si a cada TES la capitalizamos 2 veces obtendremos su correspondiente TEA. Por ejemplo, capitalizando 2 veces la TES del 8,62% obtenemos $18\% = (1 + 0,086278049)^2 - 1$.

Ejemplo 6.- Tomando como base una TNM del 2% con capitalización cada: 29, 26, 23, 20, 18, 15, 12 y 10 días, calcule sus respectivas TET.

Solución

j Mensual	Capitalización	Operación	TET
2%	cada 29 días	$(1 + 0,02/29)^{90/29} - 1 = 0,061228679$	6,122%
2%	cada 26 días	$(1 + 0,02/26)^{90/26} - 1 = 0,061290829$	6,129%
2%	cada 23 días	$(1 + 0,02/23)^{90/23} - 1 = 0,061353147$	6,135%
2%	cada 20 días	$(1 + 0,02/20)^{90/20} - 1 = 0,061415632$	6,141%
2%	cada 18 días	$(1 + 0,02/18)^{90/18} - 1 = 0,061457384$	6,145%
2%	cada 15 días	$(1 + 0,02/15)^{90/15} - 1 = 0,061520151$	6,152%
2%	cada 12 días	$(1 + 0,02/12)^{90/12} - 1 = 0,061583087$	6,158%
2%	cada 10 días	$(1 + 0,02/10)^{90/10} - 1 = 0,061625143$	6,163%

Ejemplo 7.- El 20 de enero la empresa Solid compró un paquete de acciones invirtiendo S/. 9 000 el cual vendió el 28 del mismo mes, por un importe neto de S/. 9 450. ¿Cuál fue la TEM de rentabilidad obtenida en esa operación?

Solución

La tasa de rentabilidad obtenida durante 8 días:

$$9\,450/9\,000 - 1 = 0,05$$

La TEM se calcula del siguiente modo:

$$TEM = (1 + 0,05)^{30/8} - 1 = 0,20077 = 20,08\%$$

La rentabilidad obtenida en 8 días ha sido del 5% y asumiendo la reinversión a la misma tasa en los 3,75 períodos de 8 días (30/8) que tiene el mes, la rentabilidad acumulada del mes sería del 20,08%.

Ejemplo 8.- La compañía Distribuidora El Sol tiene una rotación anual de mercaderías de 5 obteniendo un margen de utilidad bruta de 15% en cada rotación. ¿Cuál es la tasa de rentabilidad bruta anual?

Solución

Una rotación de mercaderías de 5 veces al año significa un promedio de inmovilización de inventarios de 72 días (360/5).

TEA = ?	$TEA = (1 + i)^{H/f} - 1$
f = 72	$TEA = (1 + 0,15)^{360/72} - 1$
H = 360	$TEA = 1,011357187$
i = 0,15	$TEA = 101,14\%$

Ejemplo 9.- Calcule la TEA equivalente a una TNA del 12% capitalizable trimestralmente.

Solución

TEA = ?	$TEA = (1 + j/m)^{H/f} - 1$
j = 12%	$TEA = (1 + 0,12/4)^{360/90} - 1$
H = 360	$TEA = 0,12550881$
f = 90	$TEA = 12,55\%$

5. Tasas equivalentes

Dos ó más tasas efectivas correspondientes a diferentes unidades de tiempo son equivalentes cuando producen la misma tasa efectiva para un mismo horizonte temporal. Por ejemplo, las siguientes tasas: TEM = 1,530947% y TET = 4,6635139% son equivalentes, porque ambas producen una TEA del 20%.

Una tasa de interés i es equivalente a otra i' si sus respectivas capitalizaciones realizadas durante un mismo horizonte temporal H son iguales.

5.1 Tasa equivalente partiendo de una tasa efectiva dada

La *tasa equivalente o efectiva periódica* i' se obtiene de la relación de equivalencia de la fórmula (51) y puede ser calculada cuando se tiene como dato la tasa efectiva i .

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^n - 1 = i$$

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^n = 1 + i$$

Si designamos a $j/m = i'$ como la tasa equivalente, entonces podemos despejar la incógnita i' :

$$(1 + i')^n = (1 + i)$$

$$i' = (1 + i)^{1/n} - 1$$

En este caso:

- i' = Tasa equivalente o efectiva periódica a calcular
- i = Tasa efectiva del horizonte temporal proporcionada como dato
- f = Número de días del período de tiempo correspondiente a la tasa equivalente que se desea calcular
- H = Número de días correspondiente al período de tiempo de la tasa efectiva i proporcionada como dato. A una TEA le corresponde un H de 360; a una TEM le corresponde un H de 30, etc. Similar procedimiento se sigue con una TES, TET etc.

Como $n = H/f$, entonces la fórmula anterior queda expresada:

$$i' = (1 + i)^{f/H} - 1 \quad (52)$$

En la ecuación anterior, f se expresa en el período de tiempo correspondiente a la incógnita (tasa equivalente), y H se expresa en el período de tiempo de la tasa efectiva. Ambas variables deben corresponder a una misma unidad de tiempo (días, meses, trimestres, etc.). Gráficamente puede observarse que f depende de i' y H depende de i .

$$i' = (1 + i)^{f/H} - 1$$

Ejemplo 10.- ¿A qué TEQ debe colocarse un capital para obtener al fin de un trimestre igual monto que si se hubiese colocado a una TEM del 4%?

Solución

$$\begin{aligned}
 i' &= \text{TEQ} ? & (1 + i')^6 &= (1 + 0,04)^3 \\
 n &= 6 & 1 + i' &= (1 + 0,04)^{3/6} \\
 i &= 0,04 & i' &= 1,019803903 - 1 \\
 n &= 3 & i' &= 1,9803903\%
 \end{aligned}$$

Ejemplo 11.- Si la TEM para créditos hasta 360 días es de 5%, ¿cuál será la tasa efectiva que debe cobrarse por un sobregiro de 4 días?

Solución

$$\begin{aligned}
 i'_{4d} &= ? & i_{4d} &= \left((1 + \text{TEM})^{H/360} \right)^{4d} - 1 \\
 f &= 4 & i_{5d} &= (1 + 0,05)^{4/30} - 1 \\
 H &= 30 & i_{5d} &= 0,006526561 \\
 \text{TEM} &= 0,05 & i'_{5d} &= 0,653\%
 \end{aligned}$$

Ejemplo 12.- Calcule la TEM a partir de una TEA del 24%.

Solución

$$\begin{aligned}
 i' &= \text{TEM} ? & \text{TEM} &= (1 + i)^{6/H} - 1 \\
 f &= 30 & \text{TEM} &= (1 + 0,24)^{30/360} - 1 \\
 \text{TEA} &= 0,24 & \text{TEM} &= 0,018087582 \\
 H &= 360 & \text{TEM} &= 1,81\%
 \end{aligned}$$

Ejemplo 13.- Calcule la TET a partir de una TES del 10%.

Solución

$$\begin{aligned}
 i' &= \text{TET} ? & \text{TET} &= (1 + i)^{H/180} - 1 \\
 f &= 90 & \text{TET} &= (1 + 0,1)^{90/180} - 1 \\
 \text{TES} &= 0,1 & \text{TET} &= 0,048808848 \\
 H &= 180 & \text{TET} &= 4,88\%
 \end{aligned}$$

Ejemplo 14.- Una acción en la Bolsa de Valores tuvo una rentabilidad del 17,5% en 39 días. a) ¿Cuál fue su rentabilidad mensual?; b) ¿cuál sería su rentabilidad proyectada trimestral de continuar la misma tendencia?

Solución

Rentabilidad mensual

$$\begin{array}{ll}
 i' = \text{TEM} ? & \text{TEM} = (1 + i)^{t/H} - 1 \\
 f = 30 & \text{TEM} = (1 + 0,175)^{30/39} - 1 \\
 \text{TE}_{39\text{d}} = 0,175 & \text{TEM} = 0,132075214 \\
 H = 39 & \text{TEM} = 13.21\%
 \end{array}$$

Rentabilidad proyectada trimestral

$$\begin{array}{ll}
 \text{TET} = ? & \text{TET} = (1 + i)^{H/f} - 1 \\
 H = 90 & \text{TET} = (1 + 0,175)^{90/39} - 1 \\
 i_{39\text{d}} = 0,175 & \text{TET} = 0,450861131 \\
 f = 39 & \text{TET} = 45,09\%
 \end{array}$$

En 90 días la tasa del 17,5% se capitalizará 2,307692308 veces. El número de períodos capitalizados de 39 días contenidos en 90 días se obtiene con la fracción (90/39).

5.2 Tasa nominal equivalente a una tasa efectiva dada

La relación de equivalencia entre la tasa nominal con m capitalizaciones y la tasa efectiva, *ambas para el mismo horizonte temporal*, se establece a partir de la fórmula (51).

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n - 1$$

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n$$

$$(1 + i)^{1/n} - 1 = \frac{j}{m}$$

$$j = m[(1 + i)^{1/n} - 1]$$

$$j_{(m)} = m[(1 + i)^{1/n} - 1] \quad (53)$$

Habiéndose definido $n = H/f$ entonces la fórmula (53) puede expresarse: $j_{(m)} = m[(1 + i)^{f/H} - 1]$. El subíndice (m) de j indica el número de veces que ésta se capitaliza anualmente cuando i es anual; por lo tanto, si i es mensual indicará el número de veces que j se capitaliza en un mes y así sucesivamente.

Ejemplo 15.- ¿Cuál será la TNA con capitalización trimestral, equivalente a una TEA del 24%?

Solución

$$j = ? \text{ TNA}$$

$$i = 24\%$$

$$m = 4$$

$$\text{TNA} = j_{(4)} = 4[(1 + 0,24)^{1/4} - 1] = 0,2210$$

$$\text{TNA} = 22,10\%$$

El término entre corchetes cuya solución es $0,055250147 = 5,52\%$, es la tasa periódica trimestral, la cual en el día 90 es una tasa efectiva trimestral, equivalente a una tasa nominal trimestral. Si esta tasa es capitalizada 4 veces dará lugar a una TEA y si es multiplicada por 4, como en el presente ejemplo, dará lugar a una TNA.

Ejemplo 16.- ¿Cuál será la TNS con capitalización trimestral, equivalente a una TEA del 24%?

Solución

$$j = ? \text{ TNS}$$

$$i = 24\%$$

$$m = 2$$

$$\text{TNS} = j_{(2)} = 2[(1 + 0,24)^{1/4} - 1] = 0,110500294$$

$$\text{TNS} = 11,05\%$$

Ejemplo 17.- ¿Cuál será la TNA con capitalización mensual, equivalente a una TEA del 20%?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 j_{(12)} = ? & j_{(12)} = m[(1 + TEA)^{t/H} - 1] \\
 f = 1 & j_{(12)} = 12[(1 + 0,2)^{1/12} - 1] \\
 H = 12 & j_{(12)} = 0,18371364 \\
 TEA = 0,2 & j_{(12)} = 18,37\% \\
 m = 12 & TNA = 18,37
 \end{array}$$

Ejemplo 18.-¿Qué TNT, capitalizable mensualmente, es equivalente a una TET del 15,7625%?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 j_{(3)} = ? & j_{(3)} = m [(1 + TET)^{t/H} - 1] \\
 f = 1 & j_{(3)} = 3[(1 + 0,157625)^{1/3} - 1] \\
 H = 3 & j_{(3)} = 0,15 \\
 TET = 0,157625 & j_{(3)} = 15\%
 \end{array}$$

5.3 Tasa de interés simple equivalente a una tasa de interés compuesto para un mismo horizonte temporal

Para obtener una tasa de interés simple (is) equivalente a una tasa de interés compuesto (ic), relacionamos las fórmulas de los montos: simple y compuesto, establecemos la ecuación de equivalencia y efectuamos el despeje correspondiente.

$$(16) \quad S = P(1 + is.n)$$

$$(21) \quad S = P(1 + ic)^n$$

Igualando los FSC simple y compuesto tenemos:

$$\begin{aligned}
 1 + is.n &= (1 + ic)^n \\
 is.n &= (1 + ic)^n - 1
 \end{aligned}$$

$$i_s = \frac{(1 + ic)^n - 1}{n} \quad (54)$$

Ejemplo 19.- Calcule la tasa de interés simple equivalente a una tasa del 5% mensual capitalizable mensualmente durante 6 meses.

Solución

$i_s = ?$

$i_c = 0,05$

$n = 6$

$$i_s = \frac{(1 + 0,05)^6 - 1}{6} = 0,05668260683 = 5,67\%$$

La tasa simple del 5,67% mensual produce el mismo resultado que una tasa efectiva del 5% mensual, durante 6 meses.

6. Tasa vencida

La *tasa vencida* i es el porcentaje a ser aplicado a un capital inicial, el cual se hace efectivo al vencimiento del plazo de la operación pactada (cálculo racional). Todas las fórmulas matemático-financieras, se basan en tasas vencidas.

7. Tasa adelantada

La *tasa adelantada* d , nos permite conocer el precio que habrá de pagarse por la percepción de una deuda antes de su vencimiento. La tasa adelantada determina en cuánto disminuye el valor nominal de un título valor, tomando en consideración el tiempo por transcurrir entre la fecha que se anticipa el pago y la fecha de su vencimiento. Matemáticamente es aquella que multiplicada por el capital final S , lo disminuye, para encontrar el capital inicial P .

7.1 Tasa adelantada equivalente a una tasa vencida

Si la tasa adelantada " d " se aplica sobre S y la tasa vencida " i " se aplica sobre P , entonces ¿qué tasa adelantada debe aplicarse a una determinada operación para obtener un rendimiento equivalente a una tasa vencida dada? Aplicando (23) y (38), para 1 período de tiempo, podemos obtener una tasa d equivalente a i previamente conocida:

$$P = S(1 + i)^{-1}$$

$$P = S(1 - d)$$

Relacionando los factores $(1 + i)^{-1}$ y $(1 - d)$ encontramos la equivalencia de d .

$$(1 - d) = \frac{1}{(1 + i)}$$

$$1 = (1 - d)(1 + i)$$

$$1 = 1 + i - d - di$$

$$d + di = i$$

$$d = \frac{i}{(1 + i)} \quad (55)$$

Ejemplo 20.- En una operación de descuento bancario a 90 días se requiere ganar una tasa trimestral vencida del 4,5% ¿qué tasa adelantada equivalente debe aplicarse para los 90 días?

Solución

$$d = ?$$

$$i = 0,045$$

$$d = \frac{0,045}{1 + 0,045} = 0,0430620096 = 4,31\%$$

Ejemplo 21.- ¿Qué tasa anual adelantada es equivalente a una TEA del 12%?

Solución

$$d = ?$$

$$i = 0,12$$

$$d = \frac{0,12}{1 + 0,12} = 0,1071428571 = 10,71\%$$

7.2 Tasa vencida (i) equivalente a una tasa adelantada (d)

Si conocemos la tasa d entonces podemos calcular su equivalente i , despejándola de (55).

$$d = \frac{i}{(1 + i)}$$

$$i = d + di$$

$$i - di = d$$

$$i(1 - d) = d$$

$$i = \frac{d}{(1 - d)} \quad (56)$$

Ejemplo 22.- Una tasa adelantada del 12%, ¿a qué tasa efectiva de interés es equivalente?

Solución

$$i = ?$$

$$d = 0,12$$

$$i = \frac{0,12}{1 - 0,12} = 0,1363636364 = 13,64\%$$

Ejemplo 23.- Calcule la TET equivalente a una tasa adelantada del 36% capitalizable mensualmente.

Solución

$$i = ?$$

$$d = 0,36/12$$

$$n = 3$$

$$1 + i = (1 - d)^n$$

$$i = (1 - d)^n - 1$$

$$i = (1 - 0,03)^3 - 1 = 0,095682682$$

$$i = 9,57\%$$

7.3 Factores de descuento

Los *factores de descuentos* son tasas adelantadas porque se aplican sobre los valores nominales de títulos-valores. En nuestro sistema financiero estos factores se obtienen a partir de una tasa efectiva vencida dada. Los bancos suelen preparar "factores de descuento" para todos los días del año, de tal forma que los descuentos se obtienen multiplicando el valor nominal del

documento por el factor correspondiente al período del descuento (días que faltan para su vencimiento).

Si partimos, por ejemplo de una TEM dada, podemos preparar factores de descuento para cualquier período de tiempo. Reemplazando en (55) i por una TEM tenemos:

$$d = \frac{i}{(1 + i)} = \frac{(1 + TEM)^{nH} - 1}{(1 + TEM)^{nH}}$$

Ejemplo 24.- Calcule el factor de descuento y el descuento racional a efectuar a una letra de S/. 10 000 cuyo vencimiento será dentro de 39 días. Aplique una TEM del 5%.

Solución

$$d_{39} = ?$$

$$f = 39$$

$$TEM = 0,05?$$

$$H = 30$$

$$d = \frac{(1 + 0,05)^{39/30} - 1}{(1 + 0,05)^{39/30}} = 0,06145756971$$

$$D = S[\text{factor de descuento}]$$

$$D = 10\,000 [0,06145756971]$$

$$D = 614,58$$

Idéntico resultado se obtiene con la fórmula (32) del descuento racional compuesto donde se aplica una TEM del 5%.

$$D = S[1 - (1 + i)^{-n}]$$

$$D = 10\,000[1 - (1 + 0,05)^{-39/30}] = 614,58$$

Ejemplo 25.- A partir de una TEM del 4% prepare los factores vencidos i y factores de descuento d para los 60 primeros días del año.

Solución

Los factores acumulados vencidos (tasas equivalentes) han sido calculados:

$$1^{\text{er}} \text{ día} \quad 1,04^{1/30} - 1 = 0,001308212$$

$$2^{\text{do}} \text{ día} \quad 1,04^{2/30} - 1 = 0,002618136$$

Los factores de descuentos acumulados han sido calculados:

$$1^{\text{er}} \text{ día} \quad \frac{1,04^{1/30} - 1}{1,04^{1/30}} = 0,001306503$$

$$2^{\text{do}} \text{ día} \quad \frac{1,04^{2/30} - 1}{1,04^{2/30}} = 0,002611299$$

Tabla de factores de descuento a una TEM del 4%

Día	i	d	Día	i	d
1	0,001308	0,001306	31	0,041361	0,039717
2	0,002618	0,002611	32	0,042723	0,040972
3	0,003930	0,003914	33	0,044087	0,042225
4	0,005243	0,005215	34	0,045453	0,043476
5	0,006558	0,006515	35	0,046821	0,044726
6	0,007875	0,007813	36	0,048190	0,045974
7	0,009194	0,009109	37	0,049561	0,047220
8	0,010514	0,010404	38	0,050934	0,048465
9	0,011836	0,011697	39	0,052309	0,049708
10	0,013159	0,012988	40	0,053686	0,050950
11	0,014485	0,014278	41	0,055064	0,052190
12	0,015812	0,015565	42	0,056444	0,053428
13	0,017141	0,016852	43	0,057827	0,054665
14	0,018472	0,018136	44	0,059210	0,055900
15	0,019804	0,019419	45	0,060596	0,057133
16	0,021138	0,020700	46	0,061984	0,058365
17	0,022474	0,021979	47	0,063373	0,059596
18	0,023812	0,023257	48	0,064764	0,060824
19	0,025151	0,024533	49	0,066157	0,062051
20	0,026492	0,025808	50	0,067552	0,063277
21	0,027835	0,027081	51	0,068948	0,064501
22	0,029179	0,028352	52	0,070347	0,065723
23	0,030526	0,029621	53	0,071747	0,066944
24	0,031874	0,030889	54	0,073149	0,068163
25	0,033224	0,032155	55	0,074553	0,069380
26	0,034576	0,033420	56	0,075959	0,070596
27	0,035929	0,034682	57	0,077366	0,071810
28	0,037284	0,035944	58	0,078776	0,073023
29	0,038641	0,037203	59	0,080187	0,074234
30	0,040000	0,038461	60	0,081600	0,075444

Ejemplo 25.- Calcule el descuento racional a practicar a una letra de S/. 12 000 faltando 49 días para su vencimiento y cobrando una TEM del 4%.

Solución

$$D = 12\,000 \times 0,062051 = 744,62$$

El factor 0,062051 se ha tomado de la tabla de factores de descuento.

8. Tasa de interés convencional compensatorio

Es una *tasa de interés compensatoria* cuando constituye la contraprestación por el uso del dinero o de cualquier otro bien. En operaciones bancarias, la tasa de interés convencional compensatoria está representada por la tasa activa para las colocaciones y la tasa pasiva para las captaciones, que cobran o pagan respectivamente las instituciones del sistema financiero, en el proceso de intermediación del crédito.

9. Tasa de interés moratorio

Una *tasa de interés moratorio* es la indemnización por incumplimiento del deudor en el reembolso del capital y del interés compensatorio en las fechas convenidas. El interés moratorio se calculará solamente sobre el monto de la deuda correspondiente a capital, adicionalmente a la tasa de interés convencional compensatoria o a la tasa de interés legal, cuando se haya pactado.

El deudor incurre en mora a partir del día siguiente de la fecha de vencimiento de una cuota si ésta no fuese cancelada. La tasa de interés moratoria es fijada por el BCRP en términos efectivos mensuales y está normada por los siguientes artículos del Código Civil:

- Art. 1242 El interés es compensatorio cuando constituye la contraprestación por el uso del dinero o de cualquier otro bien.
- Es moratorio cuando tiene por finalidad indemnizar la mora en el pago.
- Art. 1243 La tasa máxima del interés convencional compensatorio o moratorio, es fijada por el Banco Central de Reserva del Perú.
- Cualquier exceso sobre la tasa máxima da lugar a la devolución o a la imputación al capital, a voluntad del deudor.

10. Tasa de interés total en mora (ITM)

Una deuda en mora, de acuerdo a ley, está afecta a una tasa efectiva de interés compensatoria y paralelamente a una tasa efectiva de interés moratoria. El cálculo del interés total de una deuda en mora se obtiene con la siguiente fórmula:

$$ITM = P[(1 + ic)^n - 1] + P[(1 + im)^n - 1]$$

$$ITM = P[(1 + ic)^n + (1 + im)^n - 2] \quad (57)$$

Ejemplo 27.- El 21 de enero la empresa Continental descontó un pagaré de S/. 50 000 con vencimiento dentro de 30 días a una TEM del 4%. Si el documento se cancela el 26 de febrero, ¿cuál es el importe de la deuda, considerando que la tasa de mora es el 15% de la tasa compensatoria. Efectúe la liquidación al 26 de febrero considerando gastos de portes de S/. 5,00.

Solución

$I = ?$

$P = 50\,000$

$ic = 0,04$

$im = 0,006$

$n = 6/30$

$ic = 50\,000[1,04^{6/30} - 1] = 393,75$	
$im = 50\,000[1,006^{6/30} - 1] = 59,86$	
Liquidación al 26 de febrero	
Doc. vencido	50 000,00
Int. compensatorio	393,75
Int. de mora	59,86
Portes	5,00
Deuda total	50 458,61

Ejemplo 28.- El 18 de marzo la empresa Textiles S.A. obtuvo del Banco Oriental un préstamo de S/. 20 000 para amortizarlo en 10 cuotas uniformes de S/. 2 590,09 pagaderas cada 30 días a una TEM del 5%. Si Textiles no pudo pagar sus tres primeras cuotas y el 30 de junio cancela su deuda vencida, ¿cuál es el pago total que debe efectuar? La tasa de interés de mora equivale al 15% de la TEM. Efectúe la liquidación considerando separadamente el importe de cuotas vencidas, el interés compensatorio y el interés moratorio.

Solución

1) Cuotas vencidas 3 cuotas vencidas ($2\,590 \times 3$)	7 770,27
2) Interés compensatorio 1a Cuota $2\,590,09[1,05^{74/30} - 1] =$ 331,25 2a Cuota $2\,590,09[1,05^{34/30} - 1] =$ 192,14 3a Cuota $2\,590,09[1,05^{14/30} - 1] =$ 59,65	583,03
3) Interés moratorio 1a Cuota $2\,590,09[1,0075^{74/30} - 1] =$ 48,18 2a Cuota $2\,590,09[1,0075^{34/30} - 1] =$ 28,54 3a Cuota $2\,590,09[1,0075^{14/30} - 1] =$ 9,05	85,77
Total deuda vencida 1) + 2) + 3)	8 439, 07

Ejemplo 29.- Calcule el interés total en mora generado por una deuda de S/. 1 000 vencida hace 18 días. La TEM compensatoria es 5% y la TEM moratoria es 0,75%.

Solución

$$\begin{aligned}
 \text{ITM} &= ? & \text{ITM} &= P[(1 + ic)^n + (1 + im)^n - 2] \\
 ic &= 0,05 & \text{ITM} &= 1\,000[(1,05^{18/30} + 1,0075^{18/30}) - 2] \\
 im &= 0,0075 & \text{ITM} &= 1\,000[0,03420007] \\
 n &= 18/30 & \text{ITM} &= 34,20
 \end{aligned}$$

11. TAMN, TAMEX, TIPMN, TIPMEX

A partir del 11 de marzo de 1991 el BCRP utiliza la siguiente terminología para las operaciones activas y pasivas que efectúan las entidades del sistema financiero nacional::

TAMN	tasa activa en moneda nacional
TAMEX	tasa activa en moneda extranjera
TIPMN	tasa de interés pasiva en moneda nacional
TIMEX	tasa de interés pasiva en moneda extranjera

Las tasas activas se expresan en términos efectivos y las tasas pasivas en términos nominales con una frecuencia de capitalización determinada, de acuerdo con el tipo de operación realizada. Los ahorros capitalizan mensualmente y los depósitos a plazo capitalizan diariamente.

11.1 Tasa efectiva en soles de depósitos en moneda extranjera (dólares)

La rentabilidad o pérdida (rentabilidad negativa), originados por los depósitos de moneda extranjera en el sistema financiero, específicamente el dólar norteamericano, está en función de la tasa de interés que se perciba por la colocación de los dólares y la devaluación o revaluación del sol en relación a esa moneda.

La rentabilidad total implica el siguiente circuito:

- Capital inicial en moneda nacional.
- Conversión de la moneda nacional en moneda extranjera a través de su compra al tipo de cambio de venta de los bancos.
- Depósito del capital inicial en moneda extranjera en una entidad financiera, ganando una tasa de interés.
- Percepción de los intereses en moneda extranjera.
- Retiro de la institución financiera del monto en moneda extranjera y su conversión a moneda nacional, vendiéndola al tipo de cambio de compra de los bancos.
- Comparación del capital inicial y final en moneda nacional durante el período que ha durado la transacción, para obtener el interés y la tasa de interés percibidos.

El cálculo de la tasa efectiva (TE) en moneda nacional de un depósito en moneda extranjera, incluye la tasa efectiva ganada en moneda extranjera y la tasa de devaluación de la moneda nacional (la devaluación es una tasa efectiva), y se efectúa con la siguiente fórmula:

$$TE = (1 + i_{ME}) (1 + \text{tasa dev MN}) - 1 \quad (58)$$

Si el tipo de cambio disminuye en la fecha de venta de la moneda extranjera, con relación a la cotización en que se compró dicha moneda, las transacciones pueden originar pérdida en moneda nacional.

Ejemplo 30.- El 3 de enero la compañía Beta invirtió S/. 5 000 comprando dólares norteamericanos a un tipo de cambio de S/. 1,64 importe que depositó en el Banco Nacional ganando una TEA del 6%. El 22 de enero cuando el tipo de cambio era de S/. 1,70 canceló su cuenta, ¿cuál fue la rentabilidad: a) del período, b) la rentabilidad proyectada del mes? c) compruebe la rentabilidad obtenida.

Solución

a) Rentabilidad del período (19 días)

$$(1 + 0,06)^{19/360} [1,7/1,64] - 1 = 0,039778087 = 3,98\%$$

b) Rentabilidad mensual

$$(1 + 0,039778087)^{30/19} - 1 = 0,063526734 = 6,35\%$$

c) Comprobación de la rentabilidad

Fecha	Operación	S/.	\$
03-01	Importe inicial MN	5 000,00	
03-01	Importe inicial ME 5 000/1,64		3 048,78
22-01	Interés ME 3 048,78[1,06 ^{19/360} - 1]		9,39
22-01	Importe final ME		3 058,17
22-01	Importe final MN 3 058,17 x 1,70	5 198,89	
	Tasa efectiva en mn de 19 días	3,9778%	

Ejemplo 31.- El 22 de enero una persona invirtió S/. 10 000 comprando dólares norteamericanos a un tipo de cambio de S/. 1,70. El importe fue depositado en el Banco Nacional ganando una TEA del 6%. El 23 de febrero, por necesidades de liquidez debe cancelar su cuenta y vender su moneda extranjera al tipo de cambio de S/. 1,67 vigente en esa fecha. ¿Cuál fue la rentabilidad: a) del período, b) la rentabilidad proyectada del mes? c) compruebe la rentabilidad obtenida.

tomada en una fecha cuya estructura de costos en la actualidad está referida al año base 1990 = 100.

La tasa de inflación es medida relacionando dos Índices de Precios al Consumidor (IPC), calculados con la fórmula de Laspeyres, en la cual el numerador corresponde al índice de la fecha evaluada y el denominador al índice de la fecha tomada como base.

12.1 Cálculo de la tasa acumulada de inflación cuando se conocen las variaciones mensuales

La tasa de inflación es una tasa compuesta; por lo tanto sus cálculos se efectúan aplicando las fórmulas de la tasa efectiva $[(1 + i)^n - 1]$ en la cual se reemplaza la tasa de interés (i) por la tasa de inflación (f).

Ejemplo 33.- Utilizando la tabla de Índices de Precios al Consumidor calcule la inflación acumulada del primer trimestre del año 1993.

Solución

$$f_{1-3} = [(1 + 0,0484) (1 + 0,0293) (1 + 0,0424) - 1]100 = 12,44 \%$$

Ejemplo 34.- La empresa CPI ha informado que durante la primera semana del mes, la inflación ha sido del 0,91%, ¿cuál sería la inflación acumulada del mes?

Solución

$$f = (1,0091^4 - 1)100 = 3,69\%$$

Se asume que el mes tiene 4 semanas

Ejemplo 35.- La inflación acumulada del último año ha sido del 35%, ¿cuál fue la inflación promedio mensual?

Solución

$$f = [1,35^{1/12} - 1]100 = 2,53\%$$

Ejemplo 36.- A inicio de año el gobierno se impuso como meta no superar una inflación anual del 30%, si durante los nueve primeros meses acumuló el 20%,

¿cuánto deberá acumular en promedio en cada uno de los tres meses restantes, para no superar la meta trazada?

Solución

$$\begin{aligned}
 (1 + f)^3 &= ? & \text{Sabemos que } (1 + f)^9 (1 + f)^3 &= (1 + f)^{12} \\
 (1 + f)^{12} &= 1 + 0,3 & \text{reemplazando } (1,2)(1 + f)^3 &= 1,3 \\
 (1 + f)^9 &= 1 + 0,2 & (1 + f)^3 &= 1,3/1,2 \\
 & & f &= 0,02704 \\
 & & f &= 2,7\%
 \end{aligned}$$

En promedio se podrá acumular una inflación mensual del 2,7% o su equivalente trimestral del 8,33%.

Índice de Precios al Consumidor de Lima Metropolitana Base 1990 = 100

Mes	Índice promedio mensual		Variación porcentual			
	1992	1993	Mensual		Acumulada	
			92	93	92	93
Enero	701,3784	1113,1623	3,5	4,84	3,5	4,85
Febrero	734,6242	1145,8184	4,7	2,93	8,4	7,92
Marzo	789,3076	1194,3603	7,4	4,24	16,5	12,49
Abril	814,3521	1247,2361	3,2	4,43	20,2	17,47
Mayo	842,3481	1285,0618	3,4	3,03	24,4	21,04
Junio	872,5621	1308,4118	3,6	1,82	28,8	23,24
Julio	902,9021	1344,2516	3,5	2,74	33,3	26,61
Agosto	928,4221	1378,3131	2,8	2,53	37,1	29,82
Setiembre	952,7444	1400,6258	2,6	1,62	40,6	31,92
Octubre	987,4071	1421,7756	3,6	1,51	45,8	33,91
Noviembre	1022,3614	1444,5815	3,5	1,60	50,9	36,06
Diciembre	1061,7129	1480,8739	3,8	2,51	56,7	39,48
Promedio	884,1769	1313,7083				

12.2 Cálculo de la tasa de inflación cuando se conocen los números índices

Para calcular la tasa de inflación aplicando los IPC publicados mensualmente por el INEI, utilizamos la fórmula (48), relacionando el IPC actual (IPC_n) el

cual incluye el incremento de precios hasta el último día del mes y se publica el primer día útil del mes siguiente, con el IPC en la base (IPCo).

$$f = \frac{IPC_n - IPC_o}{IPC_o} = \frac{IPC_n}{IPC_o} - \frac{IPC_o}{IPC_o}$$

$$f = \frac{IPC_n}{IPC_o} - 1 \quad (59)$$

Ejemplo 37.- Calcular la inflación acumulada del primer trimestre del año 1993 utilizando los IPC.

Solución

$$f_{1-3} = \frac{1\,194,3003}{1\,061,7129} - 1 = 0,1249 = 12,49\%$$

El IPCo corresponde al índice al 31 de diciembre, el cual permite incluir el incremento de precios producido desde el primer día de enero; mientras que el IPCn ya incluye el incremento hasta el último día de marzo.

Ejemplo 38.- Calcule el IPC de abril si en ese mes la inflación fue del 4,4271% y el IPC de marzo fue 1 194,3603.

Solución

IPCn = ?

IPCo = 1194,36

f = 0,044271

$$0,044271 = \frac{IPC_n}{1\,194,3603} - 1$$

$$IPC_n = 1,044271 \times 1\,194,3603 = 1\,247,236$$

Ejemplo 39.- En función a los IPC y a la variación porcentual acumulada, calcule la tasa mensual media de crecimiento de los precios durante el primer trimestre de 1993.

Solución

En función de los números índices

$$f = \left(\frac{1\,194,3603}{1\,061,7129} \right)^{1/3} - 1 = 0,04 = 4\%$$

En función de la variación porcentual acumulada

$$f = [(1 + f_{1,3})^{1/3} - 1]100 \quad f = [(1 + 0,124937165)^{1/3} - 1]100 = 4\%$$

Ejemplo 40.- Una persona deposita S/. 3 000 en una cuenta de ahorros reajutable. Por dicho depósito gana una TEA del 10%. En la fecha del depósito, el 24 de junio, el índice reajutable fue 1,2406 y el 30 de setiembre, el índice fue de 1,3235. ¿Qué monto había acumulado a esta fecha? ¿Cuánto de interés ganó por la tasa de interés y cuánto por la tasa de reajuste?

Solución

- Días entre el 24.6 y 30.9: 98
- Tasa efectiva de 98 días : $(1 + 0,1)^{98/360} - 1 = 0,026285065$
- Tasa efectiva de reajuste : $(1,3235/1,2406) - 1 = 0,066822505$
- Cálculo del monto S : $3\,000[1,026285065 \times 1,066822505] = 3\,284,59$
- Cálculo del interés I : $3\,000,00 \times 0,026285065 = 78,86$
- Cálculo del reajuste : $3\,078,86 \times 0,066822505 = 205,74$

13. Tasa real

Las tasas de interés, estudiadas hasta ahora, han obviado el efecto de la inflación, considerando el valor nominal de nuestra moneda sin tener en cuenta la pérdida del poder adquisitivo por el incremento generalizado de los precios de los bienes y servicios. La tasa real pretende medir en qué grado la inflación distorsiona los costos o rentabilidades nominales, quitando a la tasa efectiva el efecto de la inflación.

La tasa real r es una tasa de interés a la cual se le ha deducido el efecto de la inflación. Si conocemos la tasa de interés i y la tasa de inflación f , podemos calcular la tasa real, corrigiendo la tasa de interés deflactándola de la inflación del siguiente modo:

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + f}$$

$$(1 + r)(1 + f) = (1 + i)$$

$$1 + f + r + rf = 1 + i$$

$$r + rf = i - f$$

$$r(1 + f) = i - f$$

$$r = \frac{i - f}{1 + f} \quad (60)$$

La fórmula (60) es equivalente a

$$r = \frac{1 + i}{1 + f} - 1$$

Ejemplo 41.- Calcule la tasa real bimestral aplicable a un depósito de ahorro de S/. 2 000 colocado el 1 de abril a una TEM del 1,5% si las inflaciones fueron del 2% y 3% para cada uno de los dos meses respectivamente.

Solución

Cálculo de la tasa de interés bimestral

$$i = 1,015^2 - 1 = 0,030225$$

Cálculo de la inflación bimestral

$$f = (1,02)(1,03) - 1 = 0,0506$$

Cálculo de la tasa real bimestral

$$r = \frac{0,030225 - 0,0506}{1,056} = -0,01939 = -1,94\%$$

El ejemplo expuesto podría interpretarse como si el 1 de abril decidimos anular una decisión de inversión en un activo determinado, cuyo costo fue de S/. 2 000 (al que coincidentemente le ha afectado el índice inflacionario calculado por el INEI), por el de ahorrar dicha suma en un banco cuya tasa nominal pasiva del 18% es capitalizada mensualmente. Así el 1 de junio, fecha del retiro del principal más los intereses generados, se habrá producido lo siguiente:

Operación	01-04	Incremento	Interés	01-06
Precio del activo	2 000	101,20		2 101,20
Depósito	2 000		60,45	2 060,45
Pérdida de poder adquisitivo al 01-06	40,75/2101,2			40,75

Bajo las condiciones expuestas si el 1 de junio quisiéramos adquirir el activo cuya compra postergamos el 1 de abril, costaría S/. 2 101,20 (precio original incrementado en 5,06% por inflación), entonces el depósito inicial ya capitalizado de S/. 2 060,45 representaría sólo el 98,06% del valor actual del activo, con lo cual se habría perdido 1,94 % en términos de poder adquisitivo.

En general, tradicionalmente, en nuestro país las tasas pasivas en términos reales han sido, ya que la inflación generalmente ha superado a la tasa de retribución al ahorrista, en cualquier modalidad; situación que induce a la protección de la pérdida de poder adquisitivo a través de otros mecanismos como son: la dolarización, especulación, banca paralela, Mesa de Negociación, etc.

Ejemplo 42.- Calcule el costo real de un préstamo pactado a una tasa efectiva anual del 20%, considerando una inflación para el mismo período del 18%.

Solución

$$r = ?$$

$$i = 0,2$$

$$f = 0,18$$

$$r = \frac{i - f}{1 + f} = \frac{0,2 - 0,18}{1,18} = 0,01694915 = 1,69\%$$

Ejemplo 43.- Un pagaré con vencimiento dentro de 45 días fue descontado a una TEM del 4%. Si la inflación del primer mes fue del 3,5% y la del segundo mes fue del 4%, ¿cuál fue la tasa real pagada por dicho crédito?

Solución

Cálculo de la tasa de interés efectiva de 45 días

$$i = 1,04^{45/30} - 1 = 0,060596059$$

Cálculo de la inflación de 45 días

$$f = (1,035)(1,04^{15/30}) - 1 = 0,05549704$$

Cálculo de la tasa real bimestral

$$r = \frac{i - f}{1 + f} = \frac{0,060596 - 0,05549}{1,05549} = 0,0048309 = 0,48\%$$

Ejemplo 44.-¿Qué tasa de inflación mensual debe producirse para conseguir una tasa real mensual del 2%, en un depósito de ahorro que paga una TNA del 36% con capitalización mensual?

Solución

Despejando f de (60) y tomando $i = 0,03$ y $r = 0,03$ tenemos:

$$r = \frac{i - f}{1 + f} \quad f = \frac{i - r}{1 + r}$$

$$f = \frac{0,03 - 0,02}{1 + 0,02} = 0,009803922$$

$$f = 0,98\%$$

14. Tasa de interés ajustada por inflación

Despejando i de la fórmula (60).

$$r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i - f = r(1 + f)$$

$$i = r + rf + f \quad (61)$$

La fórmula (61) es equivalente a

$$i = (1 + r) (1 + f) - 1$$

¿Qué tasa de interés ajustada por inflación (tasa inflada) debemos aplicar hoy a una operación, si no queremos perder poder adquisitivo por efectos de una determinada inflación proyectada, desde el momento en que una persona efectúa un financiamiento, hasta el vencimiento del plazo pactado? Debemos darle a r un valor positivo.

Ejemplo 45.- Si dispongo de S/. 3 000 y quiero ganar realmente 5% mensual ¿a qué tasa ajustada por inflación debería colocar ese capital proyectando una inflación del 4%? Compruebe la operación.

Solución

$$\begin{array}{ll} i = ? & i = r + rf + f \\ r = 0,05 & i = 0,05 + (0,05) (0,04) + 0,04 \\ f = 0,04 & i = 0,092 \end{array}$$

Comprobación

$$\begin{array}{ll} \text{Monto corriente} & 3\,000 \times 1,092 = 3\,276 \\ \text{Monto real} & 3\,276/1,04 = 3\,150 \\ \text{Tasa real} & 3\,150/3000 - 1 = 0,04 = 4\% \end{array}$$

El inversionista ha recibido a fin de mes 3 276 que deflactado por la inflación es igual a $3276/1,04 = 3150$ el cual representa el 5% de rentabilidad real.

15. Tasa discreta y continua

La tasa discreta supone períodos de capitalización cada cierto período de tiempo, tal como ocurre en el sistema financiero, donde el período más pequeño de capitalización es un día, aplicable a los depósitos a plazo, mientras la tasa continua supone una capitalización instantánea. Los procesos de

capitalización continua o instantánea, utilizados en ingeniería económica, no son aplicables en el campo financiero. De todos modos las diferencias entre una capitalización diaria con una horaria, o instantánea es casi imperceptible. El presente libro sólo utiliza tasas y flujos de caja discretos.

16. Tasas explícita e implícita

La *tasa explícita* es una tasa anunciada en las operaciones mercantiles y financieras.

La *tasa implícita* o *tasa de retorno* no figura expresamente en la operación financiera o mercantil, pero está oculta en el costo total cuando se compara un precio de contado con un precio de crédito generalmente más elevado. De acuerdo al tipo de información disponible la tasa implícita se calcula con las diversas fórmulas de tasas de interés, o con el principio de equivalencia financiera.

Ejemplo 46.- Calcular la tasa implícita mensual de un artículo cuyo precio de contado contraentrega es de S/. 1 500 y su precio de contado comercial a 45 días es de S/. 1 613,90

Solución

$$i = \left(\frac{1\ 613,90}{1\ 500} \right)^{30/45} - 1 = 0,05 = 5\%$$

17. Tasa de interés legal

De acuerdo al art. 1244 del Código Civil, la tasa de interés legal es fijada por el BCRP. Cuando deba pagarse interés, sin haberse fijado la tasa, el deudor debe abonar el interés legal. A partir del 16 de setiembre de 1992 la tasa de interés legal efectiva para las diferentes operaciones son las siguientes:

- I. Moneda nacional
 - a) Operaciones no sujetas al sistema de reajuste de deudas: 2 veces la TIPMN. La TIPMN es la tasa promedio ponderado de las tasas pagadas sobre los depósitos en moneda nacional, incluidos aquéllos a la vista, por los bancos y financieras.

- b) Operaciones sujetas al sistema de reajuste de deudas: la tasa efectiva será calculada de forma tal que el costo efectivo de estas operaciones, incluido el reajuste, sea equivalente a la tasa señalada en el punto I.a).
- c) Depósitos en consignación en el Banco de la Nación: 2 veces la TIPMN. La tasa de interés legal en moneda nacional está expresada en términos efectivos mensuales y será publicada diariamente por la SBS en el diario oficial *El Peruano*.
- II. Moneda extranjera
- a) Dólares de los Estados Unidos de América: 1,2 veces la TIPMEX. La TIPMEX es la tasa promedio ponderado de las tasas pagadas sobre los depósitos en moneda extranjera, incluidos aquéllos a la vista, por los bancos y financieras. Para el cálculo del interés legal de las monedas extranjeras distintas al dólar de los Estados Unidos de América se hará la conversión a esa moneda y se aplicará 1,2 veces la TIPMEX.
- b) Depósitos en consignación en el Banco de la Nación: 1,2 veces la TIPMEX. La tasa de interés legal en moneda extranjera está expresada en términos efectivos anuales y será publicada diariamente por la SBS en el diario oficial *El Peruano*.

Para el cálculo de los intereses legales se aplicarán los factores acumulados correspondientes al período computable, establecido por la SBS.

18. Listado de fórmulas

$$T = \frac{C_n}{C_o} - 1 \quad (48) \quad \text{Tasa}$$

$$In = \frac{C_n}{C_o} \quad (49) \quad \text{Índice}$$

$$i = \frac{I}{P} \quad (50) \quad \text{Tasa de interés}$$

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n - 1 \quad (51) \quad \text{Tasa efectiva}$$

$$i' = (1 + i)^{nH} - 1 \quad (52) \quad \text{Tasa equivalente}$$

$$j_{(m)} = m[(1 + i)^{1/n} - 1] \quad (53) \quad \text{Tasa nominal equivalente a una tasa efectiva}$$

$$is = \frac{(1 + ic)^n - 1}{n} \quad (54) \quad \text{Tasa simple equivalente a compuesta}$$

$$d = \frac{i}{(1 + i)} \quad (55) \quad \text{Tasa d equivalente a i}$$

$$i = \frac{d}{(1 - d)} \quad (56) \quad \text{Tasa i equivalente a d}$$

$$(1 + ic)^n + (1 + im)^n - 2 \quad (57) \quad \text{Tasa de interés total en mora}$$

$$(1 + i \text{ ME}) (1 + dev \text{ MN}) - 1 \quad (58) \quad \text{Tasa efectiva en soles de depósitos en ME}$$

$$f = \frac{IPC_n}{IPC_o} - 1 \quad (59) \quad \text{Tasa de inflación}$$

$$r = \frac{i - f}{1 + f} \quad (60) \quad \text{Tasa real}$$

$$i = r + rf + f \quad (61) \quad \text{Tasa ajustada por inflación}$$

19. Problemas propuestos

Tasa e índice

1. Durante los años 1990-91 el crédito agrario otorgado por el Banco Agrario fue de \$ 334 505 y \$ 271 410 (miles) respectivamente. ¿Cuáles son los índices y las tasas de crecimiento o decrecimiento de los créditos otorgados? Tome como base el año 1990 y después el año 1991. Explique. Rp. Base 1990 $I_n = 81,14\%$; $T = -18,86$. Base 1991 $I_n = 123,25\%$; $T = 23,25$.
2. En el presente mes las ventas han sido de S/. 85 000 lo que representa un crecimiento del 20% con relación al mes anterior. ¿Cuánto se vendió en el mes base? Rp. S/. 70 833,33.
3. Si en el presente año hemos tenido una producción de 17 000 unidades lo que representa una disminución del orden del 12,82% en relación al año anterior, ¿cuánto fue la producción del año base? Rp. 19 500 unidades.

Tasa de interés

4. Un capital de S/. 1 200 ha producido un interés de 240 en 28 días, ¿cuál fue la tasa de interés ganada en ese período? Rp. $i = 20\%$.
5. ¿Qué tasa de interés se aplicó a un capital de S/. 18 750 que redituó un interés S/. 1 500? Rp. $i = 8\%$.
6. ¿Cuál ha sido el capital que colocado a una tasa efectiva del 8% ha producido un interés de S/. 750? Rp. $P = S/. 9\ 375$.

Tasa nominal y proporcional

7. Si la TNA es del 48%, ¿cuánto es la tasa proporcional: a) mensual; b) trimestral? Rp. a) $TNM = 4\%$; b) $TNT = 12\%$.
8. Si la TNM es del 1,5%, ¿cuánto es la tasa proporcional: a) trimestral; b) de 8 meses y c) anual? Rp. a) 4,5%; b) 12%; c) 18%.
9. Si la TNS es de 10%, ¿cuál es la tasa proporcional cuatrimestral? Rp. $TNC = 6,66\%$.
10. ¿Cuál será la tasa proporcional de 46 días correspondiente a una TNA del 20%? Rp. $i = 2,55\%$.
11. Con los siguientes datos calcule las tasas proporcionales respectivas:

Tasa nominal	Tasa proporcional
Anual del 18%	Bimestral =
Semestral del 9%	Anual =
Mensual del 2%	Trimestral =
Anual del 12%	De 85 días =
De 85 días del 2,83%	Anual =
De 95 días del 3%	Mensual =
Bimestral del 6%	De 45 días =
Mensual del 2,5%	De 123 días =

12. La tasa aplicada al cálculo de un interés simple por 36 días ha sido de 2,4%, ¿cuál fue la TNA cobrada en esa operación? Compruebe la tasa con un capital supuesto. Rp. TNA = 24%.
13. Por un préstamo de S/. 2 000 se cobró al término de 42 días un tasa de interés simple de 2,8% ¿Cuál será la tasa proporcional de 90 días? Rp. TNT = 6%.

Tasa efectiva (n entero)

14. Calcule la TEA equivalente a una TNA del 24% capitalizable trimestralmente. Rp. 26,24%.
15. Calcule la TET a partir de una TNA del 36% capitalizable mensualmente. Rp. 9,27%.
16. Si la TNM es del 2% y el período de capitalización mensual, ¿cuánto es la tasa efectiva: a) trimestral; b) de 8 meses y c) anual? Rp. a) 6,12%; b) 17,17%; c) 26,82%.
17. Calcule la TEA que producirá una TNM del 2% que se capitaliza trimestralmente. Rp. TEA = 26,25%.
18. Las acciones de la compañía Omega han tenido una rentabilidad del 17% durante 15 días, calcule la rentabilidad mensual. Rp. TEM = 36,89%.
19. Una operación financiera produjo una rentabilidad efectiva de 1,5% en 10 días. ¿Cuánto será la rentabilidad proyectada efectiva mensual? Rp. TEM = 4,57%.
20. La empresa CLEO dedicada a la captación de fondos del público para desarrollar las empresas de su grupo económico, por campaña de 25 aniversario, lanzó al mercado el programa de captación de fondos pagando las tasas que se presentan en el siguiente cuadro:

Plazo		3 Meses		6 Meses		12 Meses	
Importes S/.		50 a 5 000	5 100 a más	50 a 5 000	5 100 a más	50 a 5 000	5 100 a más
P	Mensual	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	15,5
A	Bimestral			30,0	31,0		
G	Trimestral	44,0	46,0			52,0	54,0
O	Semestral			100,0	104,0		
S	Anual					220,0	228,0

Asumiendo que usted tiene un capital de S/. 5 100 y está dispuesto a invertirlo durante un año; ¿qué opción o conjunto de opciones es la más rentable, si los intereses periódicos son reinvertidos a la misma tasa? Rp. La opción mas rentable es ahorrar a 12 meses con reinversión mensual.

21. Calcule la TEA que producirá un depósito de ahorro por el cual se percibe una TNA del 18% con capitalización mensual. Rp. TEA = 19,56%.
22. ¿Cuál será la tasa efectiva ganada en un depósito a plazo pactado a una TNA del 18% con capitalización diaria durante 128 días? Rp. TE = 6,61%.
23. Calcular el monto de un depósito a plazo de S/. 1 000 colocado durante 6 meses en un banco que paga una TNA del 24% capitalizable diariamente. Rp. S = S/. 1127,45.
24. ¿Cuál será la TET si la TNA para los depósitos a plazo que pagan los bancos es de 24% y la frecuencia de capitalización es diaria? Rp. TET = 6,18%.

Tasa efectiva (n no entero)

25. Las acciones de la compañía Gamma adquiridas el 3 de mayo y vendidas en la Bolsa de Valores de Lima el 11 de agosto han tenido una rentabilidad del 26% durante ese período. Calcule la rentabilidad efectiva anual proyectada. Rp. TEA = 129,79%.
26. ¿A cuánto ascenderá el cargo por intereses que debe efectuar el Banco Latinoamericano en un sobregiro de S/. 1 500 del 20 al 25 de marzo a una TNA del 36% con capitalización mensual? Rp. I = S/. 7,41.
27. ¿Cuánto se pagará de interés, por un crédito de S/. 2 000 pactado una TNA del 36% con capitalización bimestral y cancelado el día 36? Rp. I = S/. 71,16.

28. Tomando como base una TNA del 24% calcule las TES si la frecuencia de capitalización es cada: 18, 22, 30, 35, 40 y 45 días. Rp. TES = 12,669%; 12,651%; 12,616%; 12,594%; 12,572%; 12,550%.
29. Calcule la tasa efectiva que ganó un depósito de ahorro, desde el 3 de mayo al 8 de junio, cuya capitalización es mensual. Durante ese período la tasa mensual fue 4% hasta el 16 de mayo y a partir de esa fecha bajó al 3,5%. Rp. 4,43% por los 36 días.
30. ¿Con cuántas capitalizaciones una TEM del 5% se habrá convertido en una TET del 15,7625%? Rp. 3 capitalizaciones.

Tasa equivalente

31. Calcule la mensual a partir de una TEA del 30%. Rp. TEM = 2,21%.
32. Calcule las tasas mensuales de los créditos promocionales sujetos al sistema de reajuste de deudas, si las TET son: 8%; 8,5% y 9%. Rp. TEM = 2,598%; 2,756%; 2,914%.
33. Un bono tuvo una rentabilidad efectiva anual de 800%. ¿Cuál fue su rentabilidad promedio semestral? Rp. TES = 200%.
34. Si se concertó un crédito a 90 días pagando una TET del 8% y se canceló a los 73 días, ¿qué tasa se debe aplicar por ese período? Rp. Tasa de 73 días = 6,44135%.
35. ¿Cuánto de interés deberá pagarse por un préstamo de S/. 1 000 a una TEM del 5% si el crédito sólo se utilizó durante 17 días? Rp. I = S/. 28,03.
36. La compañía El Sol sobregiró su cuenta corriente en S/. 3 800 del 2 al 6 de setiembre. Considerando que el banco cobra una TEA del 20%, ¿cuánto será el interés de sobregiro? Rp. I = S/. 7,71.
37. Calcule la tasa acumulada durante 9 días si la TAMN mensual ha sufrido las variaciones del cuadro adjunto. Rp. TE9d = 1,3218034%.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9
TAMN %	4,62	4,62	4,62	4,51	4,51	4,51	4,30	4,30	4,28

38. Un inversionista publica en un diario de la capital, el siguiente aviso: "Por S/. 10 000 pagamos intereses de S/. 500 en un mes; S/. 1 010 en dos meses; S/. 1 550 en tres meses; S/. 2 100 en cuatro meses". Si usted

- dispone de esa suma por cuatro meses ¿qué opción escogería?
Fundamente. Rp. depósito mensual por que rinde una TEM del 5%.
39. Un capital fue colocado el 11 de julio y retirado el 22 de diciembre del mismo año, fecha en que se había duplicado. ¿A qué TEM fue colocado? Rp. TEM = 13,5184%.
40. Un paquete accionario fue comprado el 14.04 en \$ 5 000 y vendido el 28.05 en \$5 850. ¿Cuál fue su rendimiento mensual? Rp. 11,2987%.
41. ¿A qué TEB debe colocarse un capital para que rinda en un semestre el mismo monto que una TET del 15%? Rp. TEB = 9,76534%.

Tasa nominal equivalente a una efectiva dada

42. Calcule la TNA capitalizable trimestralmente equivalente a una TEA del 12%. Rp. TNA = 11,4949%. ✓
43. Si la TEA es 30%, ¿cuál es su TNA con capitalización mensual? Rp. TNA = 26,5253%.
44. Por las ventas a crédito a 60 días una empresa carga una tasa efectiva del 12,36%. ¿Qué tasa nominal bimestral con capitalización mensual debe cargar al precio de contado? Rp. TNB = 12%.
45. Convertir la TEM del 5% a TNA, para un préstamo que se amortiza cada 90 días. Rp. TNA 63,05%.
46. Calcule las TNA para aplicar a créditos a 30, 60 y 90 días, cuyas respectivas TEA deben ser del 40%. Rp. 30 días = 34,1233872%; 60 días = 34,6085556%; 90 días = 35,1029224%.

Tasa de interés simple equivalente a una tasa de interés compuesto

47. Calcule la tasa de interés simple equivalente a una tasa efectiva anual del 30% capitalizable durante 4 años. Rp. 46,4025% de interés simple anual.

Tasa adelantada equivalente a una tasa vencida, dado "i"

48. ¿Qué tasa de descuento anual es equivalente a otra de interés efectivo del 12% anual? Rp. d = 10,71%.
49. ¿Qué porcentaje sobre el precio facturado se ganará en una venta si se aumenta el 50% al precio de costo? Compruebe su respuesta a través de una facturación supuesta. Rp. d = 33,33%.

50. ¿Cuál será la tasa mensual adelantada equivalente a una tasa vencida del 5%? Rp. $d = 4,7619\%$.
51. Si la tasa "i" correspondiente a 26 días es del 3%, cuál será la tasa "d" para ese mismo período? Rp. $d = 2,9126\%$.

Factores de descuento

52. Prepare los factores de descuento para los 30 primeros días del año a partir de una TEA del 25%. Rp. días 1, 2, 3, 4 = 0,00061965079; 00123891817; 0,00185780214; 0,0024763017, etc.
53. Aplicando el factor de descuento en base a una TEA del 25%, calcule el descuento a practicarse a una letra con valor nominal de S/. 15 000 la cual vence dentro de 24 días. Rp. $D = S/. 221,49$.

Tasa vencida equivalente a una tasa adelantada, dado "d"

54. ¿A qué tasa de interés efectivo anual equivale una tasa adelantada del 12% anual? Rp. $i = 13,63\%$.
55. ¿Qué porcentaje se tendría que aumentar al costo de un producto para ganar el 33,33% del precio de venta? Compruebe su respuesta a través de una facturación supuesta. Rp. $i = 50\%$.
56. ¿Cuál será la tasa mensual vencida equivalente a una tasa mensual adelantada del 4,761904762%? Rp. $i = 5\%$.
57. Si la tasa "d" correspondiente a 26 días es del 2,912621359%, ¿cuál será la tasa "i" para ese mismo período? Rp. $i = 3\%$.
58. Calcule la TES equivalente a una tasa adelantada del 24% anual capitalizable mensualmente. Rp. $i = 12,8869\%$.

Tasa de interés total en mora

59. Un pagaré con valor nominal de S/. 8 500 que venció el 23 de marzo, fue cancelado el 4 de abril, ¿cuál es el pago total a efectuar si la TAMN es del 5% efectiva mensual, la tasa de mora es el 15% de la TAMN, los gastos de protesto ascienden a S/. 20 y los portes son S/. 5? Rp. S/. 8 717,96.
60. La empresa Gasoil S.A. obtuvo un préstamo de S/. 20 000 a una TAMN del 5% mensual para amortizarlo en 12 cuotas constantes de S/. 2 256,51 cada 30 días. Si Gasoil se atrasa 2 cuotas y en la fecha de vencimiento

de la tercera cuota cancela su deuda vencida, ¿cuál es el pago total que debe efectuar considerando que la tasa de interés de mora es equivalente al 15% de la TAMN? Efectúe la liquidación considerando separadamente el importe de cuotas vencidas, el interés compensatorio y el interés moratorio. Rp. S/. 7 164,55.

61. Calcule el interés total en mora producido por una deuda bancaria de S/. 2 000 vencida el 12 de abril y cancelada el 4 de mayo. La TEM compensatoria es 4% y la TEM moratoria es 0,6%. Rp. ITM = S/. 67,15.
62. Un pagaré de S/. 5 000 descontado en el Banco Exterior venció el 3 de mayo y fue cancelado el 1 de junio; durante ese período la TEM compensatoria fue del 6% hasta el 16 de mayo y a partir de esa fecha hasta el vencimiento de la obligación disminuyó al 5%, asimismo la TEM moratoria aplicable representa el 15% de la TEM compensatoria. ¿Cuál es el interés total a pagar? Rp. ITM = S/. 302,53.

Tasa efectiva en soles de depósitos en moneda extranjera (dólares)

63. Calcule la rentabilidad efectiva anual en soles, de un depósito bancario en dólares. El banco paga por la moneda extranjera una TNA del 8% con capitalización mensual y se proyecta una devaluación promedio mensual del sol, del orden del 2,5%. Rp. TEA = 45,65%.
64. Calcule la tasa de rentabilidad efectiva trimestral en soles de un depósito en dólares. El banco paga por la moneda extranjera una TNA del 8% con capitalización mensual y la devaluación promedio diaria se estima en 0,05%. Rp. TET = 6,7076%.
65. Si el 23 de setiembre el T.C. fue de S/. 1,90 y el 30 de setiembre del mismo año fue de S/. 1,94 y durante dicho período mantuvo un depósito de \$ 5 000 en un banco que pagaba una TEA del 8%, a) ¿cuál fue la tasa de rentabilidad obtenida en moneda nacional?; b) ¿cuál sería la TEM proyectada?; c) ¿cuál es el interés ganado en ME? Rp. a) TE7d = 2,2581745%; b) TEM = 10,043%; c) \$ 7,49.
66. El 2 de marzo Expreso Continental invirtió S/. 12 000 comprando dólares norteamericanos a un tipo de cambio de S/. 1,72; importe que colocó en el Banco Nacional ganando una TEA del 8%. El 25 de marzo canceló su cuenta y efectuó la venta de la moneda extranjera a un tipo de cambio de S/. 1,77. ¿Cuál fue la rentabilidad: a) del período; b) la rentabilidad proyectada del mes? c) compruebe la tasa de rentabilidad en moneda

- nacional obtenida en el período. Rp. a) $TE_{23d} = 3,4142117\%$; b) $TEM = 4,4762764\%$; c) $S/. 12\ 000$ y $S/. 12\ 409,71$.
67. Efectúe nuevamente el problema anterior asumiendo que el 25 de marzo el tipo de cambio fue de $S/. 1,67$. Rp. a) $TE_{23d} -2,42839907\%$; b) $TEM = -3,15570538\%$; c) $S/. 12\ 000$ y $S/. 11\ 708,59$.

Inflación

68. Si la inflación de enero, febrero y marzo ha sido del 3% en cada mes, ¿cuánto es la inflación acumulada del trimestre? Rp. $f = 9,2727\%$.
69. En abril y mayo se registró una inflación del 3,25% y 4,56% respectivamente, ¿cuánto se acumuló en el bimestre? Rp. $f = 7,9582\%$.
70. En junio, julio y agosto las inflaciones fueron de 2,8%, 3,2% y 3,9%. Con esa información: a) calcule la inflación promedio mensual; b) proyecte la inflación para el mes de setiembre; c) calcule la inflación que se acumularía en el cuatrimestre junio-setiembre. Rp. a) 3,299%; b) 3,299%; c) 13,8635%.
71. La empresa Apoyo S.A. ha informado que durante los primeros cinco días del mes de abril se registró una inflación de 0,75%, ¿qué inflación se acumularía en ese mes? Rp. $f = 4,5852\%$.
72. Habiéndose acumulado 40% de inflación en el período enero-octubre y siendo objetivo del gobierno no superar el 50% anual, ¿cuál sería la inflación promedio mensual que debería ocurrir en el bimestre noviembre-diciembre para llegar a ese límite? Rp. $f = 3,5098\%$.
73. En el plan presentado por el gobierno peruano al FMI se estableció como meta para el año 1993 una inflación del 27%. El 16 de enero la empresa Apoyo S.A. informó que la inflación registrada en la primera quincena de enero fue del 3,4%. Con esa información: a) proyecte la inflación del año 93; b) en lo que resta del año ¿cuánto de inflación se podrá acumular para llegar al 27% anual?; c) ¿cuál será la inflación promedio quincenal que a partir del 16 de enero se tendría que acumular para cumplir con el compromiso del FMI? Rp. a) 123,0965%; b) 22,8239% en 11 meses; c) 0,897842% quincenal.
74. ¿Qué tasa de inflación promedio mensual se produjo durante 24 meses, si en ese mismo período el nivel general de los precios se duplicó? Rp. $f = 2,93\%$ mensual.

Cálculo de la tasa de inflación con IPC

75. Consultando el Boletín del INEI calcule las inflaciones mensuales de enero a diciembre, las inflaciones acumuladas desde enero hasta diciembre, las inflaciones anuales comparando cada mes del presente año con su correspondiente del año anterior. Rp. Según boletín INEI.
76. La evolución de los IPC de mayo a setiembre fue:

Mayo	Junio	Julio	Agosto	Setiembre
33 921	37 076	40 450	43 362	45 791

- a) Calcule la inflación de junio, julio, agosto y setiembre.
b) Tomando como base mayo, acumule la inflación a julio, a agosto y a setiembre.
c) Sobre la base de la tendencia histórica del último trimestre proyecte la inflación para octubre.
d) Calcule la inflación promedio quincenal registrada en julio.
e) Asumiendo que la inflación de octubre será del 3% proyecte el número índice para ese mes.

Rp. a) Junio 9,3%; julio 9,1%; agosto 7,2%; setiembre 5,6%;
b) Inflaciones acumuladas: junio-julio 19,25%; junio-agosto 27,83%; junio-setiembre 34,99%; c) Inflación proyectada de octubre 7,29%;
d) Inflación quincenal de julio 4,45%. e) Número índice 47 164,73.

77. Una persona deposita S/. 5 000 en una cuenta de ahorros reajutable. Por dicho depósito gana una TES del 5%. En la fecha de depósito, el 14 de abril, el índice reajutable fue 1,0923 y el 11 de julio, el índice fue de 1,1411. ¿Qué monto acumuló a esa fecha? ¿Cuánto de interés ganó por la tasa de interés y cuánto por la tasa de reajuste? Rp. S = S/. 5 349,47; Interés = S/. 120,70; Reajuste = S/. 228,77.

Tasa real

78. Calcule la tasa real de ahorros durante el mes de febrero considerando una tasa del 3% mensual y una inflación del 3,5%. Rp. $r = -0,48\%$.
79. Calcule la tasa real de ahorros por el período comprendido entre marzo y julio. La evolución de las tasas han sido las siguientes:

Mes	Ahorros	Inflación	IPC
Febrero			469,00
Marzo	3,0%	3,41%	485,00
Abril	3,0%	3,30%	501,00
Mayo	3,0%	5,79%	530,00
Junio	2,8%	3,40%	548,00
Julio	2,8%	3,10%	565,00

Rp. $r = -4,14\%$.

80. Con la siguiente información, calcule la tasa real trimestral de un depósito de ahorro que capitaliza mensualmente: a) inflación promedio quincenal 2%; b) remuneración al ahorro: 15%, 18% y 16% de TNA para el primer, segundo y tercer mes respectivamente. Rp. - 7,53%.
81. Calcule la tasa real trimestral para un certificado de depósito a plazo (CDP), el cual capitaliza diariamente, por el período comprendido entre julio y setiembre. La evolución de las tasas han sido las siguientes:

Mes	TNM	Inflación
Julio	4,0%	3,8%
Agosto	3,5%	4,2%
Setiembre	3,5%	3,6%

Rp. $r = -0,27026\%$

82. Calcule la tasa real de ahorros del período 1 abril - 31 agosto, con la siguiente información:

Meses	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto
IPC	460,00	483,00	507,15	527,44	548,53	570,47
Inflación	5,0%	5,0%	5,0%	4,0%	4,0%	4,0%
TEM de ahorros	4,0%	4,0%	4,0%	3,5%	3,5%	3,5%

Rp. $r = -3,30\%$.

83. Por un crédito bajo la modalidad de pagaré obtenido el 7 de julio y amortizado el 21 de agosto, el banco cobró una TEM del 5%. ¿Cuál fue la tasa real pagada? Utilice la tabla del problema anterior (82). Rp. $r = 1,64\%$.

84. Un depósito de ahorro de S/. 2 000 efectuado el 23 de junio se convirtió el 1 de setiembre en S/. 2 142,81. En ese mismo período la tasa de inflación fue del 6%. ¿Qué tasa real acumulada obtuvo? ¿Cuál fue la tasa real promedio mensual? Rp. $r = 1,076\%$; r mensual = $0,4597\%$.
85. En un período trimestral, ¿qué tasa de inflación mensual debe producirse para alcanzar una tasa real trimestral del 5%, en un depósito de ahorro que paga una TNA del 36% con capitalización mensual? Rp. $f = 1,3384191\%$.
86. ¿En cuánto tiempo se podrá duplicar un capital, en términos de moneda constante, si se percibe una TEM del 2% y la inflación anual proyectada es del 20%? Rp. $n = 12,53$ años.

Tasa de interés ajustada por inflación

87. En un determinado proyecto la empresa Tecnomin S.A. invirtió S/. 20 000 con el objetivo de obtener una tasa real de rendimiento anual del 40%. Si la tasa de inflación se proyecta en 27% anual, ¿con qué tasa nominal anual se cumplirá el objetivo propuesto? Compruebe su respuesta. Rp. $i = 77,8\%$ anual.
88. La compañía Ventas Rápidas S.A. está concediendo créditos a 60 días y se ha puesto como objetivo ganar una TEM real del 6% sobre el financiamiento otorgado, ya que el mercado así lo permite. ¿Qué TNA con capitalización mensual debe cobrar si proyecta durante el próximo trimestre una inflación del 6%? Compruebe la operación con una venta al crédito de S/. 10 000. Rp. $TNA = 96,9475092\%$.
89. Un inversionista desea conocer qué tasa de rentabilidad efectiva mensual debe exigir por sus depósitos si desea obtener una tasa real del 3% mensual. La inflación proyectada anual se estima en 24%. Calcule dicha tasa. Rp. $i = 4,86\%$.

Tasa implícita

90. Un artefacto electrodoméstico tiene un precio de contado de S/. 800 y al crédito lo ofrecen con una cuota inicial de S/. 300 y 2 letras de S/. 300 con vencimiento a 30 y 60 días respectivamente. ¿Qué TEA están cargando en el financiamiento? Rp. $TEA = 336,51\%$; $TEM = 13,07\%$.
91. La compañía SIGA S.A. vende un producto al contado en S/. 150 pero al crédito "cargándolo en cuenta" lo ofrece para pagarlo sin inicial y dos

cuotas iguales de S/. 90 a 15 y 45 días cada una. ¿Qué TEM está cargando en el programa de crédito? Rp. $TEQ = 9,7829\%$; $TEM = 20,52\%$.

92. Un automóvil Hyundai 96 modelo Excel de 3 puertas tiene un precio cash de 11 690 dólares norteamericanos. Al crédito puede adquirirse con una cuota inicial de \$ 4 642 y cuotas mensuales de \$ 360. Asumiendo que el programa de crédito sea de 24 cuotas, ¿cuál es el costo efectivo mensual y anual del financiamiento? Rp. $TEM = 1,6977\%$; $TEA = 22,3865\%$.

Problemas de razonamiento matemático

93. Un capital colocado durante 6 meses, a una TNA con capitalización trimestral, ha producido el mismo interés que si hubiera estado colocado durante 7 meses a la misma TNA a interés simple. Calcule la TNA. Rp. $133,33\%$.

20. Resumen del capítulo

Una tasa es la razón entre la diferencia de dos cantidades de la misma especie y una de ellas tomada como base.

Según el balance bancario, las tasas activas corresponden a las operaciones de colocaciones de las instituciones financieras y se expresan generalmente en términos efectivos; mientras que las tasas pasivas corresponden a las operaciones de captaciones y se expresan en términos nominales con una frecuencia de capitalización normada por las autoridades competentes.

Una tasa nominal es una tasa referencial susceptible de ser dividida o multiplicada (proporcionalizada), para ser expresada en tiempos equivalentes; así, por ejemplo, a una tasa nominal anual del 24% le corresponde una tasa proporcional mensual del 2% , trimestral del 6% , etc. El concepto de tasa efectiva o compuesta surge cuando una tasa nominal es capitalizada más de una vez en el año originando un mayor rendimiento que el indicado nominalmente. La capitalización consiste en adicionar los intereses al capital anterior el mismo que nuevamente vuelve a ganar la tasa pactada. Una tasa efectiva es susceptible de ser elevada a un exponente fraccionario (radicación) para ser expresada en otra unidad de tiempo, denominándosele en este caso, tasa equivalente.

Cuando la tasa se aplica sobre un capital P para calcular el interés al final de un plazo pactado se llama tasa vencida i . Cuando la tasa se aplica a un monto o valor futuro, para deducir el interés de dicho importe se le denomina tasa adelantada d .

A la tasa activa y pasiva se le llama compensatoria cuando constituye la contraprestación por el uso del dinero o de cualquier otro bien. La tasa activa es moratoria cuando el deudor ha incumplido en el reembolso del capital y del interés en las fechas convenidas. Cuando una deuda está en mora, además de la tasa compensatoria origina una tasa de mora cuya finalidad es indemnizar el incumplimiento del pago pactada. La suma de la tasa compensatoria y de la tasa moratoria constituye la tasa de interés total en mora.

Según el tipo de moneda que se utilice a la tasa activa se le denomina TAMN (tasa activa moneda nacional) o TAMEX (tasa activa moneda extranjera); mientras a la tasa pasiva se le denomina TIPMN (tasa de interés pasiva en moneda nacional) o TIPMEX (tasa de interés pasiva en moneda extranjera). Las tasas en moneda nacional suelen ser expresadas en términos efectivos mensuales y las tasas en moneda extranjera son fijadas en términos efectivos anuales.

El incremento generalizado de los bienes y servicios es medido con la tasa de inflación, la cual es una tasa efectiva o compuesta y se calcula relacionando dos índices de precios: el numerador referido a la fecha de evaluación y el denominador referido a la base. La tasa real es una tasa efectiva a la que se le ha quitado el efecto de la inflación. La tasa corregida por inflación (tasa inflada) es una tasa a la cual se le ha adicionado la inflación.

Cuando la capitalización de la tasa de interés se da a intervalos regulares de tiempo se denomina discreta (años, semestres, trimestres, meses, días); si la capitalización se da en intervalos de tiempo infinitamente pequeños, pudiendo llegar a ser instantánea, recibe el nombre de tasa continua.

La tasa explícita es aquella que figura expresamente en un contrato de crédito, mientras que una tasa implícita está oculta entre un valor presente y su respectivo valor futuro o flujos equivalentes.

VI

Anualidades vencidas

Introducción

Una *anualidad* es un conjunto de dos o más flujos, en el que a partir del segundo, los períodos de tiempo comprendido entre un flujo y el anterior son uniformes. Este período uniforme de tiempo: *período de renta*, no es necesariamente un año, sino un intervalo de tiempo fijo, por ejemplo día, quincena, mes, trimestre, etc. Bajo estas características, son ejemplos de anualidades: los sueldos, dividendos, depreciaciones, amortizaciones, pensiones de enseñanza, pensiones de jubilación, primas de seguros, etc. Dentro de la anualidad, el importe de cada flujo (ingreso o egreso), recibe el nombre de *renta* (R) y el conjunto de rentas constituye la anualidad.

Clasificación de las anualidades

Cierta	Temporal	Vencida u ordinaria	Simple
	Perpetua	Anticipada o imposición	
Eventual o contingente	Vitalicia	Diferida	General
	Temporal	Vencida	
		Anticipada	Impropia o variable

Anualidades ciertas

Son aquellas anualidades cuyas condiciones se conocen de antemano (plazo, tasa, frecuencia de capitalización, etc.) y se establecen previamente, generalmente por contrato entre las partes intervinientes (deudor y acreedor). Estas anualidades de acuerdo a su duración pueden ser:

- Temporales Cuando el horizonte temporal es un plazo determinado. Por ejemplo, cuando se contrae un crédito a través de *Leasing* u otra modalidad a un plazo específico.
- Perpetuidades Son anualidades en la que el fin del horizonte temporal no está determinado, como por ejemplo: la emisión de bonos que en algunos países pagan una renta a perpetuidad.

Anualidades eventuales o contingentes

Son aquellas cuya fecha inicial o terminal dependen de algún suceso previsible, pero cuya fecha de realización no puede especificarse por estar en función de algún acontecimiento externo no previsible exactamente. Son ejemplos de anualidades eventuales los seguros de vida, en los cuales se conocen la renta pero su duración es incierta. El desarrollo de estos flujos corresponden al campo de las matemáticas actuariales, el cual demanda no sólo el conocimiento del interés compuesto sino también las probabilidades. Estas anualidades a su vez pueden ser:

- Vitalicias Es una anualidad que tiene vigencia mientras dure la vida del rentista.
- Temporales Es en esencia, una anualidad vitalicia cuya diferencia con ella estriba en que termina después de un determinado número de pagos, aun cuando el rentista continúe con vida.

Las anualidades ciertas y contingentes pueden ser a su vez:

- **Vencidas u ordinarias:** cuando las rentas se inician a fin de período.
- **Anticipadas o imposiciones:** cuando las rentas se inician a comienzo de período.
- **Diferidas:** cuando deudor y acreedor, después de haber fijado los períodos de pago, acuerdan la exoneración del pago de las rentas durante

un determinado número de vencimientos, capitalizándose las rentas vencidas al capital anterior. Las rentas diferidas pueden ser a su vez: vencidas y anticipadas.

Las anualidades en general pueden ser a su vez:

- **Simples:** cuando el período de renta coincide con el período de capitalización.
- **Generales:** cuando el período de renta no coincide con el período de capitalización. Pueden darse varios períodos capitalizables por período de renta, o varios períodos de renta por período capitalizable.
- **Impropias o variables:** son anualidades cuyas rentas no son iguales.

Simbología

P = Valor presente de una anualidad

S = Monto de una anualidad, valor futuro

R = Renta

H = Número de días del plazo de la anualidad a interés compuesto

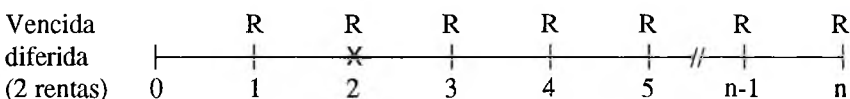
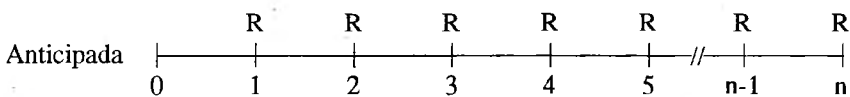
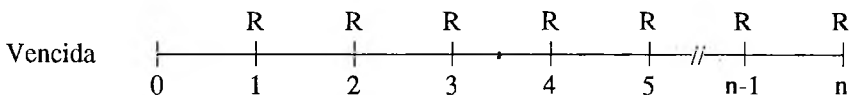
f = Número de días del período de capitalización

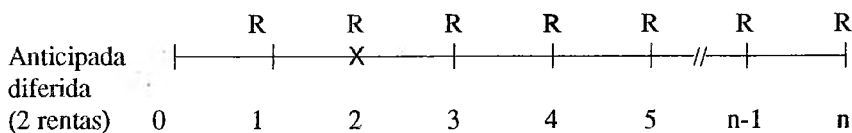
n = Número de períodos de capitalización en el Horizonte temporal ($n = H/f$)

i = Valor constante que asume la tasa de interés del período capitalizable

m = Número de períodos de capitalización en un año de la TNA

Esquema de la clasificación de las anualidades ciertas temporales





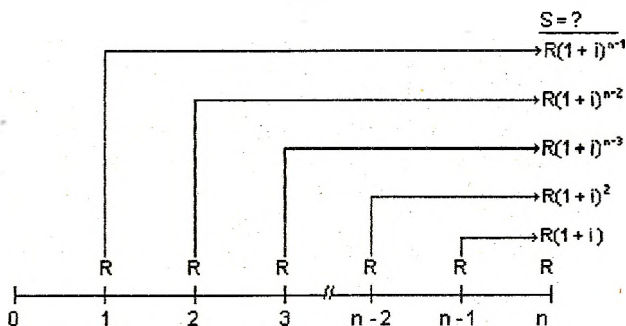
Las anualidades perpetuas tienen un esquema similar a las temporales con un número de periodos capitalizados que tienden a infinito.

1. Anualidades y rentas ciertas vencidas

Las rentas pueden ser capitalizadas (monto de una anualidad), actualizadas (valor presente de una anualidad) o evaluadas en cualquier momento de un determinado horizonte temporal, aplicando el principio de equivalencia financiera. A partir de un stock de efectivo ya sea en el presente o en el futuro, es posible calcular el importe de su correspondiente flujo uniforme o renta constante.

2. Monto de una anualidad simple

Estableciendo una ecuación de equivalencia financiera tomando como fecha focal el final del horizonte temporal, el monto S de una anualidad simple, puede obtenerse del modo siguiente.



Cada pago R está sometido a interés compuesto por n números diferentes de periodos: el primero durante $n - 1$, el segundo durante $n - 2$, el penúltimo

durante un período y el último no devenga interés ya que su pago coincide con la fecha de término del plazo. El monto total de la anualidad es igual a la suma de los montos parciales de cada R llevado al final del horizonte temporal:

$$S = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \dots + R(1 + i)^{n-3} + R(1 + i)^{n-2} + R(1 + i)^{n-1}$$

S es igual a la suma de una progresión geométrica cuyo primer término es R , su razón $(1 + i)$ y se resuelve aplicando la fórmula (5).

$$S = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{1 + i - 1}$$

$$S = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \quad (62)$$

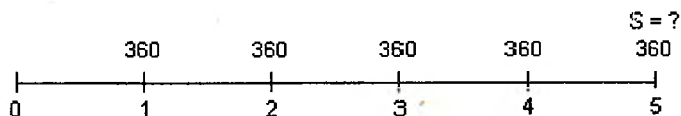
El factor de capitalización de la serie uniforme

En (62) el término entre corchetes es conocido como el Factor de Capitalización de la Serie (FCS). La fórmula puede representarse:

$$S = R \cdot FCS_{i;n} \quad (62')$$

La fórmula (62') se lee: "el FCS a una tasa i por período y n períodos de capitalización transforma una serie uniforme de rentas en un valor futuro S ". La función del FCS a una tasa i por período durante n períodos es llevar a un momento cualquiera del futuro S , las R que componen la anualidad, capitalizándolas durante los períodos del horizonte temporal.

Ejemplo 1.- Si un trabajador ha cotizado a una Administradora de Fondos de Pensiones (AFP) el equivalente de \$ 360 anual, durante sus últimos cinco años de actividad laboral dependiente, ¿qué importe habrá acumulado en ese período si percibió una TEA del 10%?



Solución

n	Renta	Períodos capitalizados	Operación	Monto de la renta
0				
1	360	4	$360[1,1^4]$	527,08
2	360	3	$360[1,1^3]$	479,16
3	360	2	$360[1,1^2]$	435,60
4	360	1	$360[1,1^1]$	396,00
5	360	0	$360[1,1^0]$	360,00
				2 197,84

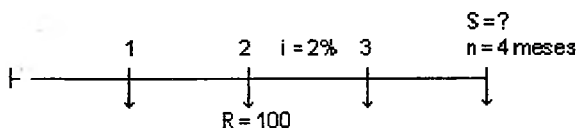
Cada uno de los flujos ha sido llevado hacia el momento 5 con un FSC. Su desarrollo directo se efectúa aplicando el FCS.

$$S = R \cdot FCS_{0,10;5}$$

$$\begin{aligned}
 S &= 360 \left[\frac{(1 + 0,1)^5 - 1}{0,1} \right] \\
 &= 360 \times 6,1051 = 2\,197,84
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.- ¿Qué monto se acumulará en una cuenta de ahorros, si a fin de mes y durante 4 meses consecutivos se depositó S/. 100 por los cuales se percibe una TNA del 24% capitalizable mensualmente?

Solución



$$S = R \cdot FCS_{0,02;4}$$

$$S = 100 \left[\frac{(1 + 0,02)^4 - 1}{0,02} \right] = 412,16$$

3. Valor presente de una anualidad simple

Estableciendo una ecuación de equivalencia financiera tomando como fecha focal el inicio del horizonte temporal, el valor presente P de una anualidad se puede obtener reemplazando (21) $S = P \cdot FSC_{i;n}$ en (62) $S = R \cdot FCS_{i;n}$

$$S = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

Reemplazando S por su equivalente

$$P(1 + i)^n = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

$$P = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i (1 + i)^n} \right] \quad (63)$$

El factor de actualización de la serie uniforme

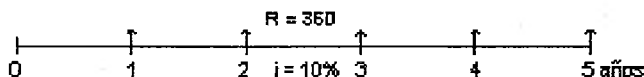
En (63) el término entre corchetes es conocido como el Factor de Actualización de la Serie (FAS). La fórmula puede representarse:

$$P = R \cdot FAS_{i;n} \quad (63')$$

La fórmula (63') se lee: "el FAS a una tasa i por período y n períodos capitalizables, transforma una serie uniforme de Rentas (R) en un valor presente (P)". La función del FAS a una tasa i por período durante n períodos,

es traer del futuro (S) hacia el presente las R que componen la anualidad, actualizándolas durante los períodos del horizonte temporal.

Ejemplo 3.- Calcule el valor presente de los 5 flujos anuales de \$ 360 c/u del ejemplo 1 aplicando una TEA del 10%.



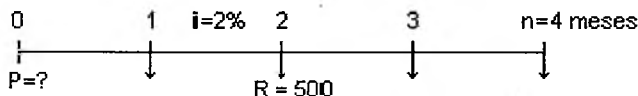
Solución

n	Renta	Períodos actualizados	Operación	Valor presente
5	360	5	$360[1,1^{-5}]$	223,53
4	360	4	$360[1,1^{-4}]$	245,88
3	360	3	$360[1,1^{-3}]$	270,47
2	360	2	$360[1,1^{-2}]$	297,52
1	360	1	$360[1,1^{-1}]$	327,27
0				1 364,68

Cada uno de los flujos ha sido traído del futuro hacia el presente o momento 0 con un FSA. Su desarrollo directo se efectúa aplicando el FAS.

Ejemplo 4.- Actualmente, la empresa Sara S.A. decide cancelar las 4 últimas cuotas fijas insolutas de un préstamo contraído con una entidad financiera, ascendente cada una a S/. 500; las mismas que vencerán dentro de 30, 60, 90 y 120, días respectivamente. ¿Qué importe deberá cancelar hoy si la TEM es del 5%?

Solución



$$P = R \cdot \text{FAS}_{0,05;4}$$

$$S = 500 \left[\frac{(1 + 0,05)^4 - 1}{0,05(1 + 0,05)^4} \right]$$

$$S = 500 \times 3,545950504 = 1\,772,98$$

4. Cálculo del valor de las rentas en las anualidades simples

Una serie uniforme de rentas ha sido llevada al futuro capitalizándola con el FCS y ha sido traída a valor presente actualizándola con el FAS. Las fórmulas aplicadas son:

$$S = R \cdot FCS_{i;n} \quad (62')$$

$$P = R \cdot FAS_{i;n} \quad (63')$$

Cuando en un problema de equivalencia financiera se conocen: i , n y además S o P entonces es posible calcular R en función del monto o el valor presente despejándolas de (62') o (63').

4.1 Renta conociendo el valor futuro

Despejando R de (62') tenemos:

$$S = R \cdot FCS_{i;n}$$

$$R = S \left[\frac{1}{FCS_{i;n}} \right]$$

$$R = S \left[\frac{1}{\frac{(1 + i)^n - 1}{i}} \right]$$

$$R = S \left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (64)$$

El factor de depósito al fondo de amortización

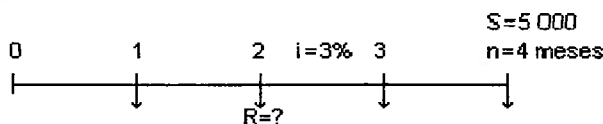
En (64) el término entre corchetes es conocido como el Factor de Depósito al Fondo de Amortización (FDFA). La fórmula puede representarse:

$$R = S \cdot \text{FDFA}_{i;n} \quad (64')$$

La fórmula (64') se lee: "el FDFA a una tasa i por período y n períodos capitalizables, transforma un valor futuro (S), en un conjunto de Rentas (R) equivalentes, distribuidas uniformemente a través del horizonte temporal".

Ejemplo 5.- Una empresa ha decidido adquirir dentro de 4 meses un grupo electrógeno cuyo precio estima en S/. 5 000. ¿Qué importe constante de fin de mes, debe ahorrar en ese período de tiempo, en un banco que paga una TNA del 36% con capitalización mensual, a fin de disponer ese monto al vencimiento de dicho plazo?

Solución



$$R = S \cdot \text{FDFA}_{0,03;4}$$

$$\begin{aligned}
 R &= 5\,000 \left[\frac{0,03}{(1 + 0,03)^4 - 1} \right] \\
 &= 5\,000 \times 0,2390270452 = 1\,195,14
 \end{aligned}$$

4.2 Renta conociendo el valor presente

Despejando R de (63') tenemos:

$$P = R \cdot \text{FAS}_{i;n}$$

$$R = P \left[\frac{1}{FAS_{i;n}} \right]$$

$$R = P \left[\frac{1}{\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}} \right]$$

$$R = P \left[\frac{i(i+1)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (65)$$

El factor de recuperación del capital

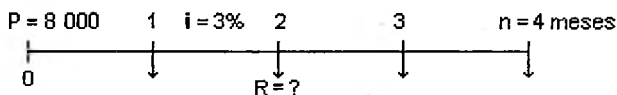
En (65) el término entre corchetes es conocido como el Factor de Recuperación del Capital (FRC). La fórmula puede representarse:

$$R = P \cdot FRC_{i;n} \quad (65')$$

La fórmula (65') se lee: "el FRC a una tasa i por período y n períodos capitalizables, transforma un valor presente (P), en un conjunto de Rentas (R) equivalentes, distribuidas uniformemente a través del horizonte temporal".

Ejemplo 6.- ¿Cuál será la cuota constante a pagar por un préstamo bancario de S/. 8 000, reembolsable en 4 cuotas cada fin de mes? El banco cobra una TNA del 36% con capitalización mensual.

Solución



$$R = P \cdot FRC_{0,03;4}$$

$$R = 8\,000 \left[\frac{0,03(1 + 0,03)^4}{(1 + 0,03)^4 - 1} \right]$$

$$= 8\,000 \times 0,2690270452 = 2\,152,22$$

5. Cálculo de n en una anualidad

A partir de las fórmulas:

$$S = R \cdot FCS_{i;n} \quad (62') \quad \text{ó} \quad R = S \cdot FDFA_{i;n} \quad (64')$$

$$P = R \cdot FAS_{i;n} \quad (63') \quad \text{ó} \quad R = P \cdot FRC_{i;n} \quad (65')$$

podemos calcular n, empleando el método del "tanteo" o despejándola directamente de cualquiera de las fórmulas señaladas anteriormente.

5.1 Cálculo de n en función al FCS o FDFA

Ya que el FCS y el FDFA son recíprocos, el despeje de n a partir de las fórmulas (62) ó (64) nos dará el mismo resultado:

$$S = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

$$Si = R(1 + i)^n - R$$

$$R(1 + i)^n = Si + R$$

$$\text{Log } R + n \text{ Log } (1 + i) = \text{Log } (Si + R)$$

$$n \text{ Log } (1 + i) = \text{Log } (Si + R) - \text{Log } R$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{Si}{R} + 1 \right]}{\text{Log}(1 + i)} \quad (66)$$

5.2 Cálculo de n en función al FRC o FAS

Ya que el FRC y el FAS son recíprocos, el despeje de n a partir de las fórmulas (63) ó (65) nos dará el mismo resultado:

$$R = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$R = P \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right]$$

$$R [1 - (1+i)^{-n}] = P i$$

$$- (1+i)^{-n} = Pi/R - 1$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - Pi/R$$

$$n = - \frac{\text{Log} \left[1 - \frac{Pi}{R} \right]}{\text{Log}(1+i)} \quad (67)$$

Ejemplo 7.- ¿Cuántos depósitos de fin de mes de S/. 500 serán necesarios ahorrar, para acumular un monto de S/. 5 474,86 en un banco que paga una TNA del 24% con capitalización mensual?

Solución

Planteando la ecuación de equivalencia $S = R \cdot FCS$ ó $R = S \cdot FDFA$ y despejando en cualquiera de ellas llegamos a la fórmula (66), que se resuelve del siguiente modo.

$$n = ?$$

$$i = 0,24/12$$

$$R = 500$$

$$S = 5\,474,86$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{Si}{R} + 1 \right]}{\text{Log}(1+i)}$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{5\,474,86 \times 0,02}{500} + 1 \right]}{\text{Log}(1 + 0,02)} = 10$$

Ejemplo 8.- ¿Con cuántas cuotas constantes trimestrales vencidas de S/. 500 se podrá amortizar un préstamo de S/. 5 000, por el cual se paga una TET del 6,1208%?

Solución

Planteando la ecuación de equivalencia $P = R \cdot \text{FAS}$ o $R = P \cdot \text{FRC}$ y despejando n en cualquiera de ellas, llegamos a la fórmula (67), que se resuelve del siguiente modo.

$$\begin{aligned} n &= ? \\ i &= 0,061208 \\ R &= 500 \\ P &= 5\,000 \end{aligned} \quad n = - \frac{\text{Log} \left[1 - \frac{Pi}{R} \right]}{\text{Log}(1 + i)}$$

$$n = - \frac{\text{Log} \left[1 - \frac{5\,000 \times 0,061208}{500} \right]}{\text{Log}(1 + 0,061208)} = 15,93990757$$

Ya que no es aplicable pactar un crédito a 15,94 trimestres, la presente operación puede pactarse con 15 cuotas: 14 de S/. 500 y la última de un importe mayor, o con 16 cuotas: 15 de de S/. 500 y la última de un importe menor. Adoptando esta última decisión la equivalencia financiera puede plantearse del siguiente modo:

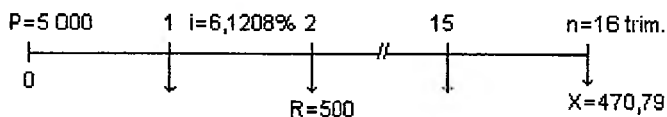
$$5\,000 = 500 \cdot \text{FAS}_{0,061208; 15} + X \cdot \text{FSA}_{0,061208; 16}$$

$$5\,000 = 4\,818,02 + 0,3865376086X$$

$$181,98 = 0,3865376086X$$

$$X = 470,79$$

El diagrama de tiempo-valor de la *anualidad impropia o variable* es el siguiente:



6. Cálculo de la tasa de interés implícita de una anualidad

Cuando en una anualidad se conocen P , R , S y n exceptuando la tasa efectiva periódica, entonces ésta es posible hallarla planteando la ecuación de equivalencia y buscando el valor de la tasa aplicando la interpolación lineal.

Ejemplo 9.- Un artefacto electrodoméstico tiene un precio de contado de \$ 1 500 y al crédito se ofrece con una cuota inicial de \$ 300 y 12 cuotas uniformes de \$ 130 c/u pagaderas cada fin de mes. ¿Cuál es la TEM cargada en el financiamiento?

Solución

$$i = ?$$

$$P = R \cdot FAS_{i,n}$$

$$P = 1\,200$$

$$1\,200 = 50 \cdot FAS_{i,12}$$

$$n = 12$$

$$R = 100$$

i	Valor
4%	1 220,0596
?	1 200,0000
5%	1 152,2227

$$a = \frac{c}{d} \quad b \quad a = \frac{20,059589}{67,83687567} = 0,2957033145$$

$$i = 4 + 0,29 = 4,29\%$$

7. Factores financieros

En el capítulo III, Interés compuesto, y en el presente capítulo, Anualidades vencidas, se han demostrado los factores financieros, cuya importancia es

fundamental en la aplicación de una diversidad de problemas financieros. Nos apoyaremos en ellos para facilitar la explicación de: anualidades anticipadas y diferidas, rentas perpetuas, gradientes de crecimiento y los demás capítulos que restan del presente libro. A continuación presentamos un cuadro resumen de los seis factores desarrollados, donde se puede observar que los tres factores de la izquierda constituyen los recíprocos de los de la derecha o viceversa.

Factores financieros

$FSC = (1 + i)^n$	Factor Simple de Capitalización	$FSA = (1 + i)^{-n}$	Factor Simple de Actualización
$FCS = \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$	Factor de Capitalización de la Serie	$FDFA = \left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right]$	Factor de Depósito al Fondo de Amortización
$FRC = \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right]$	Factor de Recuperación del Capital	$FAS = \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right]$	Factor de Actualización de la Serie

Si conocemos i y n podemos calcular cualquiera de los seis factores financieros, los que aplicándolos adecuadamente con alguna otra variable conocida de una anualidad, nos van a permitir efectuar transformaciones de valor equivalente con S , P o R .

Factores financieros aplicados a S , P y R

$S = P \cdot FSC_{i;n}$	Valor futuro en función del valor presente
$S = R \cdot FCS_{i;n}$	Valor futuro en función de la renta constante
$P = S \cdot FSA_{i;n}$	Valor presente en función del valor futuro
$P = R \cdot FAS_{i;n}$	Valor presente en función de la renta constante
$R = S \cdot FDFA_{i;n}$	Renta constante en función del valor futuro
$R = P \cdot FRC_{i;n}$	Renta constante en función del valor presente

7.1 Relaciones entre los factores financieros

- a) El valor presente de una anualidad es su monto actualizado

$$\text{FCS. FSA} = \text{FAS}$$

$$\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \left[\frac{1}{(1 + i)^n} \right] = \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right]$$

- b) El monto de una anualidad es su valor presente capitalizado

$$\text{Despejando FCS de a) tenemos FCS} = \text{FAS. FSC}$$

$$\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] (1 + i)^n = \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

- c) $\text{FDFA} + i = \text{FRC}$

$$\left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right] + i = \left[\frac{i + i[(1 + i)^n - 1]}{(1 + i)^n - 1} \right] = \left[\frac{i + i(1 + i)^n - i}{(1 + i)^n - 1} \right] = \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

- d) $\text{FRC} - i = \text{FDFA}$

$$\text{Despejando FDFA de c) tenemos FDFA} = \text{FRC} - i$$

- e) $\frac{\text{FDFA}}{\text{FRC}} = \text{FSA}$

$$\frac{\left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right]}{\left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right]} = \left[\frac{i[(1 + i)^n - 1]}{[i(1 + i)^n][(1 + i)^n - 1]} \right] = \left[\frac{1}{(1 + i)^n} \right]$$

f) $FSA \cdot FRC = FDFA$

Despejando FDFA de e) tenemos $FDFA = FSA \cdot FRC$

g) $\frac{FDFA}{FSA} = FRC$

Despejando FRC de e) tenemos $FRC = FDFA/FSA$

h) $FRC \cdot FCS = FSC$

Despejando de g) tenemos $FSC = FRC \cdot FCS$

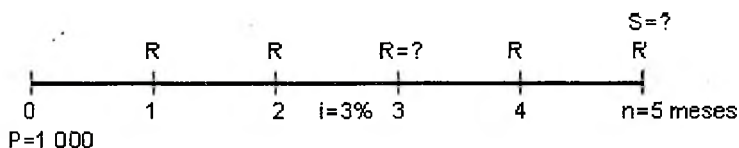
i) $FCS_{n+1} = FCS + FSC_n$

$$\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] + (1 + i)^n = \left[\frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i} \right]$$

8. Problemas resueltos

1. Efectúe las seis transformaciones financieras equivalentes considerando un capital inicial de S/. 1 000, una TNA del 36% con capitalización mensual y 5 rentas vencidas de 30 días cada una.

Solución



- a) Cálculo de S en función de P

$$S = P \cdot FSC_{0,03;5} = 1\,000,00[1,159274074] = 1\,159,27$$

- b) Cálculo de R en función de S

$$R = S \cdot FDFA_{0,03;5} = 1\,159,27[0,1883545714] = 218,35$$

c) Cálculo de R en función de P

$$R = P \cdot FRC_{0,03;5} = 1\,000,00[0,2183545714] = 218,35$$

d) Cálculo de P en función de S

$$P = S \cdot FSA_{0,03;5} = 1\,159,27[0,8626087846] = 1\,000,00$$

e) Cálculo de P en función de R

$$P = R \cdot FAS_{0,03;5} = 218,35[4,579707187] = 1\,000,00$$

f) Cálculo de S en función de R

$$S = R \cdot FCS_{0,03;5} = 218,35[5,30913581] = 1\,159,27$$

$$(1+i)^n$$

$$S = P \cdot FSC$$

2. ¿Cuál será el monto de un Certificado de Depósito a Plazo Fijo comprado el 16 de marzo y cancelado el 15 de mayo? La inversión inicial fue de S/. 800 y la TNA fue del 12% con capitalización diaria.

Solución

$$S = ?$$

$$S = P \cdot FSC_{0,00033333;60}$$

$$P = 800$$

$$S = 800[1,02019792]$$

$$n = 60$$

$$S = 816,16$$

$$i = 0,12/360$$

3. ¿Cuál será el valor nominal de un pagaré que será descontado faltando 38 días para su vencimiento? Al pagaré se le aplicará una TNM del 3% con capitalización diaria y se requiere disponer un importe neto de S/. 1 000.

Solución

$$S = ?$$

$$S = P \cdot FSC_{0,001;38}$$

$$P = 1\,000$$

$$S = 1\,000[1,03871151]$$

$$n = 38$$

$$S = 1\,038,71$$

$$i = 0,03/30$$

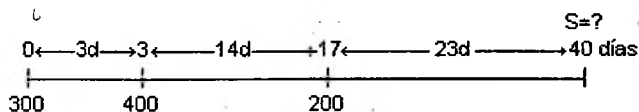
4. ¿Por qué monto tendrá que aceptarse un pagaré con vencimiento a 45 días necesitándose disponer de S/. 5 000? En las operaciones de descuento el banco cobra una TEA del 20%.

Solución

$$\begin{aligned}
 S &= ? & S &= P \cdot FSC_{0,000506577; 45} \\
 P &= 5\,000 & S &= 5\,000[1,023051874] \\
 n &= 45 & S &= 5\,115,26 \\
 TED &= 0,000506577
 \end{aligned}$$

5. Hoy una persona deposita en un banco S/. 300, dentro de tres días S/. 400 y 14 días después de este último depósito, S/. 200 ¿Cuánto habrá acumulado 40 días después de haber efectuado el primer depósito si percibe una TNA del 18% con capitalización diaria?

Solución



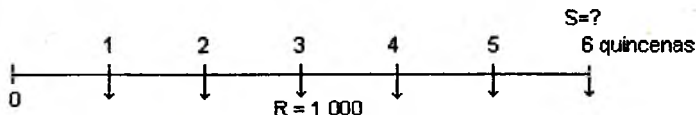
La TED es $0,18/360 = 0,0005$

$$\begin{aligned}
 S &= 300FSC_{0,0005; 40} + 400FSC_{0,0005; 27} + 200FSC_{0,0005; 23} \\
 S &= 306,06 + 407,47 + 202,31 \\
 S &= 915,84
 \end{aligned}$$

$$S = R \cdot FCS$$

6. Calcular el monto de una serie de 6 depósitos de S/. 1 000 hechos al final de cada 15 días. Los depósitos perciben una TNA del 36% capitalizable mensualmente.

Solución



La TEQ es $1,03^{15/30} - 1 = 0,014889157$

$$S = R \cdot FCS_{0,014889157; 6}$$

c) Cálculo de R en función de P

$$R = P \cdot FRC_{0,03;5} = 1\,000,00[0,2183545714] = 218,35$$

d) Cálculo de P en función de S

$$P = S \cdot FSA_{0,03;5} = 1\,159,27[0,8626087846] = 1\,000,00$$

e) Cálculo de P en función de R

$$P = R \cdot FAS_{0,03;5} = 218,35[4,579707187] = 1\,000,00$$

f) Cálculo de S en función de R

$$S = R \cdot FCS_{0,03;5} = 218,35[5,30913581] = 1\,159,27$$

$$S = P \cdot FSC$$

2. ¿Cuál será el monto de un Certificado de Depósito a Plazo Fijo comprado el 16 de marzo y cancelado el 15 de mayo? La inversión inicial fue de S/. 800 y la TNA fue del 12% con capitalización diaria.

Solución

$$\begin{aligned} S &= ? & S &= P \cdot FSC_{0,00033333;60} \\ P &= 800 & S &= 800[1,02019792] \\ n &= 60 & S &= 816,16 \\ i &= 0,12/360 \end{aligned}$$

3. ¿Cuál será el valor nominal de un pagaré que será descontado faltando 38 días para su vencimiento? Al pagaré se le aplicará una TNM del 3% con capitalización diaria y se requiere disponer un importe neto de S/. 1 000.

Solución

$$\begin{aligned} S &= ? & S &= P \cdot FSC_{0,001;38} \\ P &= 1\,000 & S &= 1\,000[1,03871151] \\ n &= 38 & S &= 1\,038,71 \\ i &= 0,03/30 \end{aligned}$$

4. ¿Por qué monto tendrá que aceptarse un pagaré con vencimiento a 45 días necesitándose disponer de S/. 5 000? En las operaciones de descuento el banco cobra una TEA del 20%.

$$S = 1\,000[6,227820901]$$

$$S = 6\,227,82$$

7. Industrias del Mar S.A. (Indumar) y Peruexport han celebrado un contrato por medio del cual la primera le alquila a la segunda un terreno por un período de dos años y por una renta de \$ 500 mensuales, los cuales deberá depositar a fin de cada mes en una cuenta bancaria que le reportará a Indumar una TEA del 15%. Asumiendo que Peruexport cumplirá con su compromiso ¿qué importe habrá acumulado Indumar al finalizar el contrato de alquiler?

Solución

$$S = ? \quad \text{TEM} = 1,15^{12} - 1 = 0,011714917$$

$$R = 500 \quad S = R.FCS_{0,011714917; 24}$$

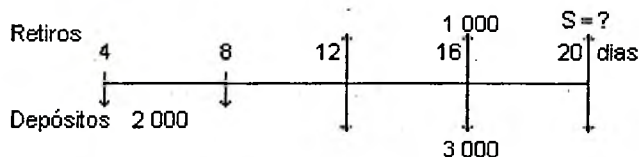
$$n = 24 \quad S = 500[27,52900447]$$

$$i = 0,01171491 \quad S = 13\,764,50$$

8. En el mes de abril, la compañía SARA tuvo el siguiente movimiento en su cuenta corriente: efectuó depósitos de S/ 2 000, los días 4 y 8 y S/. 3 000 los días 12, 16 y 20; asimismo efectuó retiros de S/. 1 000 los días 12, 16 y 20; calcule el saldo de la cuenta corriente al día 20, si por los saldos deudores paga una TEM del 4% y por los saldos acreedores gana una TEM del 3%?

Solución

Diagrama de flujo de caja bruto



Proveedor	Meses				
	0	1	2	3	4
A	4 000	3 000	3 000	3 000	3 000
B	3 000	3 250	3 250	3 250	3 250

Los importes en el momento 0 representan la cuota inicial. Asumiendo una TEM del 5% ¿cuál sería su recomendación? ¿por qué?

Solución

$$PA = 4\,000 + 3\,000 FAS_{0,05;4}$$

$$PA = 4\,000 + 10\,637,85$$

$$PA = 14\,637,85$$

$$PB = 3\,000 + 3\,250 FAS_{0,05;4}$$

$$PB = 3\,000 + 11\,524,34$$

$$PB = 14\,524,34$$

Si efectuamos una evaluación del costo a valor presente tomando la tasa del 5%, la decisión sería el precio que represente el menor de los costos, en el presente caso el proveedor B.

11. En el proceso de adquisición de una maquinaria se han recibido las siguientes propuestas: a) al contado por S/. 10 000 y b) al crédito con una cuota inicial de S/. 2 000 y seis cuotas mensuales de S/. 1 500. ¿Qué opción escogería usted si el costo del dinero es del 5% efectivo mensual?

Solución

$$P = 2\,000 + 1\,500 FAS_{0,05;6}$$

$$P = 2\,000 + 7\,613,54$$

$$P = 9\,613,54$$

Evaluando a valor presente el financiamiento propuesto, la opción del crédito, a un costo presente de S/. 9 613,54 es mas conveniente que el precio de contado de S/. 10 000.

$$P = S.FSA$$

12. Una deuda de S/. 4 000 que vence dentro de 45 días se propone cancelarla hoy efectuando un pago de S/. 3 800, ¿es conveniente para el

acreedor esta propuesta, si su costo de oportunidad es del 5% efectivo mensual?

Solución

$$\begin{array}{ll} P = ? & P = 4000 [1,05^{-45/30}] \\ S = 4\,000 & P = 4\,000[0,9294286413] \\ n = 45/30 & P = 3\,717,71 \\ i = 0,0016 & \end{array}$$

Si el costo de oportunidad es 5% mensual, entonces la propuesta de la cancelación de la deuda hoy, con un pago de S/. 3 800 es conveniente, ya que su valor presente a una TEM del 5% es de sólo 3 717,71 y el deudor propone cancelarla con S/. 3 800.

13. Una letra con valor nominal de S/. 2 000 ha sido descontada faltando 48 días para su vencimiento aplicando una TEM del 5%. ¿Qué importe neto recibirá el descontante?

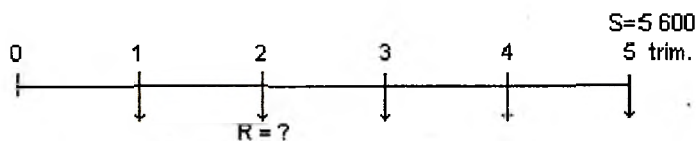
Solución

$$\begin{array}{ll} P = ? & P = 2000 [1,05^{-48/30}] \\ S = 2\,000 & P = 2\,000[0,9249049884] \\ n = 48/30 & P = 1\,849,81 \\ i = 0,0016 & \end{array}$$

R = S.FDFA

14. Si deseamos acumular S/. 5 000 en un banco, mediante 5 depósitos iguales cada fin de trimestre ganando una TEM del 3%, ¿cuál será el importe de cada depósito?

Solución



$$\begin{array}{ll}
 R = ? & \text{La TET es } 1,03^3 - 1 = 0,092727 \\
 S = 5\,000 & R = S.FDFA_{0,092727; 3} \\
 n = 3 & R = 5\,000[0,1661871236] \\
 i = 0,092727 & R = 830,94
 \end{array}$$

15. La empresa Textiles S.A. ha decidido ahorrar una determinada suma constante durante dos años, para adquirir una nueva máquina automatizada, cuyo costo será en esa fecha aproximadamente de \$ 9 000. Si la TEA que ganará en una institución de crédito es 15%, ¿a cuánto ascenderá cada depósito de fin de mes?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 R = ? & \text{La TEM es } 1,15^{1/12} - 1 = 0,011714917 \\
 S = 9\,000 & R = S.FDFA_{0,011714917; 24} \\
 n = 24 & R = 9\,000[0,03632532375] \\
 i = 0,011714917 & R = 326,93
 \end{array}$$

R = P.FRC

16. Cuál es la cuota fija a pagar por un préstamo bancario de S/. 8 000 pactado a una TNA del 24% para ser amortizado en 8 cuotas trimestrales?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 R = ? & \text{La TET es } 0,24/4 = 0,06 \\
 P = 8\,000 & R = P.FRC_{0,06; 8} \\
 n = 8 & P = 8\,000[0,1610359426] \\
 i = 0,06 & P = 1\,288,29
 \end{array}$$

17. Un automóvil cuyo precio al cash es de \$ 10 000, es vendido al crédito con una cuota inicial del 35% y 12 cuotas mensuales uniformes vencidas. Calcule el importe de cada cuota si por el financiamiento cobran una TEM del 5% .

Solución

Pagando el 35% del precio de contado el financiamiento neto P es \$ 6 500

$$\begin{array}{ll}
 R = ? & R = P \cdot FRC_{0,05; 12} \\
 P = 6\,500 & P = 6\,500[0,11282541] \\
 n = 12 & P = 733,37 \\
 i = 0,05 &
 \end{array}$$

Cálculo de n (FCS y FDFA)

18. Se necesita adquirir una máquina evaluada en \$ 8 000. ¿Dentro de cuántos meses podrá disponerse ese importe, ahorrando cada fin de mes una suma constante de \$ 1 800 en una institución financiera que paga una TEM del 2%?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 n = ? & \\
 S = 8\,000 & \\
 R = 1\,800 & \\
 i = 0,02 & \\
 n = \frac{\text{Log}\left[\frac{Si}{R} + 1\right]}{\text{Log}(1 + i)} & \\
 n = \frac{\text{Log}\left[\frac{8\,000 \times 0,02}{1\,800} + 1\right]}{\text{Log}(1 + 0,02)} = 4,300328793 &
 \end{array}$$

La compra puede efectuarse dentro de 4 meses y 9 días. Alternativamente pueden efectuarse cuatro o cinco depósitos, cuyos importes por equivalencia financiera serían:

- a) en cuatro cuotas: 3 de \$ 1 800 y la cuarta cuota de \$ 3 040,56.
 b) en cinco cuotas: 4 de \$ 1 800 y la quinta cuota de \$ 1 265,37

Cálculo de n (FRC y FAS)

19. ¿En cuánto tiempo podrá cancelarse un préstamo de S/. 15 000 con pagos de S/. 2 000 cada fin de trimestre? La entidad financiera cobra una TNA del 24% capitalizable trimestralmente.

Solución

$$\text{La TET es } 0,24/4 = 0,06$$

$$\begin{array}{l}
 n = ? \\
 P = 15\,000
 \end{array}$$

$$R = 2\,000$$

$$i = 0,06$$

$$n = - \frac{\text{Log}\left[1 - \frac{Pi}{R}\right]}{\text{Log}(1 + i)}$$

$$n = - \frac{\text{Log}\left[1 - \frac{15\,000 \times 0,06}{2\,000}\right]}{\text{Log}(1 + 0,06)} = 10,25996573$$

La compra puede efectuarse dentro de 2½ años y 23 días, o en su defecto pueden efectuarse diez u once amortizaciones cuyos importes por equivalencia financiera serían;

- a) en diez cuotas: 9 de S/. 2 000 y la décima cuota de S/. 2 501,13.
b) en once cuotas: 10 de S/. 2 000 y la onceava cuota de S/. 531,19.

Cálculo de i

20. La compañía Carsa, por campaña de navidad, está ofreciendo la venta de TVs en las siguientes condiciones:

Modelo	Cash	4 Cuotas	6 Cuotas
SR14	\$ 460	\$ 135	\$ 92

¿Cuál es la tasa de interés de las dos opciones suponiendo que la compra se va a efectuar a plazos y que las cuotas son mensuales, siendo la primera de ellas, la cuota inicial?

Solución

$$i = ?$$

$$P = R \cdot \text{FAS}_{i,n}$$

$$P = 325$$

$$325 = 135 \text{ FAS}_{i,3}$$

$$n = 3$$

$$R = 135$$

i	Valor
11%	329,9014
?	325,0000
12%	324,2472

$$a = \frac{c}{d} b \quad a = \frac{4,9014}{5,6542} = 0,86686$$

$$i = 11 + 0,87 = 11,87\%$$

$$i = ?$$

$$P = 368$$

$$n = 3$$

$$R = 135$$

$$P = R \cdot FAS_{i;n}$$

$$368 = 92 FAS_{i-3}$$

i	Valor
7%	377,2181
?	368,0000
8%	367,3293

$$a = \frac{c}{d} b \quad a = \frac{9,2181}{9,8888} = 0,93217$$

$$i = 7 + 0,93 = 7,93\%$$

9. Listado de fórmulas

$$S = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \quad (62) \quad \text{Monto de una anualidad}$$

$$S = R \cdot FCS_{i;n} \quad (62') \quad \text{Monto de una anualidad}$$

$$P = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] \quad (63) \quad \text{Valor presente de una anualidad}$$

$$P = R \cdot FAS_{i;n} \quad (63') \quad \text{Valor presente de una anualidad}$$

$$R = S \left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (64) \quad \text{Renta en función de S}$$

$$R = S.FDFA_{i;n} \quad (64') \text{ Renta en función de } S$$

$$R = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (65) \text{ Renta en función de } P$$

$$R = P.FRC_{i;n} \quad (65') \text{ Renta en función de } P$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{Si}{R} + 1 \right]}{\text{Log}(1+i)} \quad (66) \text{ } n \text{ en función del FCS o FDFA}$$

$$n = - \frac{\text{Log} \left[1 - \frac{Pi}{R} \right]}{\text{Log}(1+i)} \quad (67) \text{ } n \text{ en función del FRC o FAS}$$

10. Problemas propuestos

- Demuestre las siguientes relaciones:

1.- FAS = FCS. FSA	2.- FCS = FAS. FSC
3.- FRC = FDFA + i	4.- FDFA = FRC - i
5.- FSA = FDFA/FRC	6.- FDFA = FSA. FRC
7.- FRC = FDFA/FSA	8.- FSC = FRC. FCS
9.- $FCS_{n+1} = FCS + FSC_n$	
- Efectúe las seis transformaciones financieras equivalentes, considerando un capital inicial de S/. 5 000, una TNA del 36% anual con capitalización mensual y 5 rentas uniformes vencidas de 90 días cada una. Rp. $P = S/. 5\,000$; $R = S/. 1\,294,57$; $S = S/. 7\,789,84$.
- Utilizando una TEM del 3% y 24 cuotas mensuales calcule los valores de los 6 factores financieros. Rp. $FSC = 2,032794106$; $FSA = 0,4919337365$; $FAS = 16,93554212$; $FRC = 0,05904741595$; $FDFA = 0,02904741595$; $FCS = 34,42647022$.
- Utilizando una TEM del 3% y 8 cuotas trimestrales vencidas calcule los valores de los 6 factores financieros. Rp. $FSC = 2,032794106$; $FSA =$

0,4919337365; FAS = 5,479162095; FRC = 0,182509658; FDFA = 0,08978265793; FCS = 11,13800842.

S = P.FSC

5. Se necesita un financiamiento bancario de S/. 4 000 bajo la modalidad de descuento. ¿Por qué monto debe aceptarse un pagaré para descontarlo a 45 días a una TEM del 4%? Rp. S = S/. 4 242,38.
6. ¿Por qué monto debe extenderse una letra a 90 días para obtener un efectivo de S/. 2 000 después de descontarla a una TNA del 12% con capitalización diaria. Rp. S = S/. 2 060,90.

S = R.FCS

7. Una persona deposita en una cuenta de ahorros al final de cada trimestre un importe constante de S/. 2 000. ¿Qué monto acumulará en el plazo de dos años percibiendo una TNA del 24% capitalizable trimestralmente? Rp. S/. 19 794,94.
8. ¿Qué monto puede constituirse durante 3 años depositando S/. 1 000 cada fin de mes y percibiendo una TNA del 24% con capitalización mensual? Rp. S = 51 994,37.
9. ¿Cuál será el importe capitalizado al final del sexto mes, efectuando depósitos de S/. 1 000 cada 30 días en una institución bancaria que paga una TNA del 36% con capitalización trimestral? Rp. S = S/. 6 454,50.
10. ¿Qué monto se habrá acumulado en una cuenta de ahorros si a fin de mes y durante 8 meses consecutivos se depositó S/. 800 en un banco que paga una TEA del 12%? Rp. S = S/. 6 616,63.

P = R.FAS

11. Un crédito mutual fue pactado a ser cancelado en 20 cuotas uniformes de S/. 250 cada una, cada fin de trimestre pagando una TNA del 36%. El cliente habiendo cumplido puntualmente sus pagos, al vencimiento de la duodécima cuota decide cancelarla conjuntamente con las cuotas insolutas. ¿Cuál es el importe total a cancelar en esa fecha? Rp. P = S/. 1 633,70.
12. Calcule el precio de contado equivalente de una maquinaria vendida con una cuota inicial de S/. 2 000 y 12 cuotas mensuales de S/. 300, utilizando una TET del 9%. Rp. P = S/. 5 001,55.

13. Calcule el valor presente de una anualidad compuesta de 20 rentas uniformes vencidas de S/. 2 000 cada una, a una TEM del 4%. La primera renta se pagará dentro de tres meses y las siguientes en períodos de 3 meses cada uno. Rp. P = S/. 14 494,80.
14. La empresa Alfa alquila un local comercial durante 5 años por un importe anual de \$ 12 000 pagadero \$ 3 000 por trimestre vencido. Alfa recibe como alternativa del arrendatario la propuesta de efectuar un único pago de \$ 17 000 al inicio del contrato. Considerando que Alfa puede invertir el importe de los alquileres que percibirá a una TEM del 5% ¿le conviene la alternativa propuesta? Rp. No, ya que el VP de los alquileres es \$ 18 013,60.

P = S.FSA

15. Dentro de 70 días se recibirá S/. 2 000, ¿cuál es su valor actual a una TNA del 18% anual con capitalización mensual? Rp. P = S/. 1 931,71.
16. Habiéndose descontado una letra con valor nominal de S/. 1 000, la cual vence dentro de 42 días a una TEM del 5%, ¿cuál es el importe neto disponible? Rp. P = S/. 933,97.
17. ¿Cuál ha sido el capital que al cabo de 6 meses se convirtió en S/. 2 000 a una TEA del 20%? Rp. P = S/. 1 825,74.
18. Un órgano electrónico mod. MT-280 es ofrecido por una casa comercial al precio de contado contraentrega de \$ 430 y al crédito con una cuota inicial de \$ 200 y una letra que puede otorgarse a los siguientes plazos: a 15 días por \$ 235, a 30 días por \$ 239, a 45 días por \$ 245. ¿Cuál es la mejor oferta suponiendo que el costo de oportunidad del cliente es del 5% mensual y tiene indiferencia por disponer del bien ahora o dentro de 45 días? Rp. La mejor oferta sería a 30 días con un valor presente de \$ 427,62.

R = S.FDFA

19. Calcule el importe de la renta constante que colocada al final de cada trimestre durante 4 años permita constituir un monto de S/. 20 000. La TNA aplicable es del 36% con capitalización mensual. Rp. R = S/. 592,08.
20. El programa de inversiones de Productos Industriales S.A. (Prodinsa) planea adquirir dentro de seis meses un equipo de computación

- interconectado para toda su empresa a un costo de \$ 10 000. La Gerencia Financiera de Prodinsa puede colocar sus excedentes mensuales de caja en una institución financiera que paga una TEM del 2%. ¿Qué importe constante de fin de mes deberá ahorrar para acumular los \$ 10 000 al final del sexto mes? Rp. R = \$ 1 585,26.
21. Se planea reemplazar una máquina dentro de 4 meses, cuyo precio se estima en S/. 5 000. ¿Qué importe constante de fin de mes deberá depositarse durante ese plazo en un banco que paga una TEM del 5%, a fin de comprar dicha máquina con los ahorros capitalizados? Rp. R = S/. 1 160,06.
22. Un préstamo de S/. 5 000 debe ser cancelado en su totalidad dentro de un año. Trimestralmente deben pagarse los intereses aplicando una TET del 8%. Para el pago de intereses y amortizar el préstamo se efectúan depósitos trimestrales por los que se perciben una TEM del 2%. Calcule el importe de la cuota que pueda cubrir tanto los intereses trimestrales como cancelar el préstamo a su vencimiento. Rp. R = S/. 1 540,91.

R = P.FRC

23. Un préstamo de S/. 5 000 debe cancelarse en 12 cuotas uniformes cada fin de mes, aplicando una TNA del 36% capitalizable mensualmente. Calcule el importe de cada cuota. Rp. R = S/. 502,31.
24. La empresa Equipos S.A. vende sus máquinas al contado en \$ 10 000 pero debido a que ha conseguido un financiamiento del exterior está planeando efectuar ventas al crédito con una cuota inicial de \$ 5 000 y seis cuotas mensuales uniformes. Si la TEA a cargar al financiamiento es del 25%, calcule el importe de las cuotas del programa de ventas a plazo. Rp. R = S/. 888,93.
25. Se compró un auto cuyo precio de contado fue \$ 12 000, pagando una cuota inicial de \$ 2 000 y el saldo cancelable en cuatro armadas mensuales iguales. ¿Cuál será el importe de cada cuota si el costo del financiamiento es del 2% mensual? Rp. R = S/. 2 626,24.
26. Prepare una alternativa de financiamiento para una máquina que se vende al contado a un precio de \$ 4 000. Al crédito se otorgará con una cuota inicial equivalente al 25% del precio de contado y seis cuotas uniformes pagaderas cada 30 días. Se cargará una TEM del 5% sobre el saldo deudor. Rp. R = S/. 591,05.

27. En la adquisición de una máquina una empresa recibe las siguientes propuestas:

Alternativas	A	B
Vida útil (años)	10	12
Precio de contado \$	5 000	5 800

- ¿Cuál es la propuesta más conveniente considerando un costo de oportunidad del 15% anual? Rp. Alternativa A con un costo anual de \$ 996,26.
28. Una empresa solicita a una entidad financiera un préstamo de S/. 20 000 para ser reembolsado en 2 años a una TEM del 2% con cuotas fijas cada 90 días. Durante el primer año las cuotas deben ser equivalentes al 40% del préstamo y durante el segundo año deben ser equivalentes al 60% del préstamo. Calcule el importe de las cuotas durante el primer y segundo año. Rp. 1° año: R = S/. 2 315,12; 2° año: R = S/. 4 404,20.

Cálculo del tiempo (FCS y FDFa)

29. ¿En cuánto tiempo podrá acumularse un monto de S/. 2 000 efectuando depósitos de S/. 150 cada fin de quincena, en un banco que paga una TNA del 24% anual con capitalización mensual? Rp. 12,58222416 quincenas.
30. ¿Por cuántos meses una persona debe depositar S/. 250 cada fin de mes, en un banco para formar un monto de S/. 2 000 en la fecha del último depósito, si percibe una TEM del 3%? Rp. 7,277405148.

Cálculo del tiempo (FRC y FAS)

31. ¿En cuántas cuotas de S/. 1 576,14 pagaderas cada fin de mes se podrá amortizar un préstamo de S/. 8 000? La entidad financiera cobra una TEM del 5%? Rp. 6.
32. ¿Cuántas cuotas mensuales vencidas de S/. 1 650 serán necesarias para cancelar un préstamo de S/. 8 500? La deuda será contraída en un banco que cobra una TNA del 24% anual con capitalización trimestral. Rp. 5,48 cuotas.

33. Con el objeto de retirar S/. 800 cada 30 días una persona deposita S/. 10 000 en un banco ganando una TEM del 2%. ¿Cuántos retiros podrá efectuar? Rp. $14,52746992 = 15$ retiros.
34. Una máquina cuyo precio de contado es de S/. 5 000 se compra el día 26 de mayo pagando al contado S/. 2 000 y S/. 1 000 cada 30 días. ¿En qué fecha quedará cancelada totalmente la máquina, asumiendo que los pagos se efectúan puntualmente y que la empresa que concedió el crédito carga una TEM del 5% sobre los saldos pendientes de pago? Rp. Dentro de 100 días, el 3 de setiembre.

Cálculo de la tasa de interés

35. Por campaña escolar una casa comercial ofrece "paquetes escolares" en productos, por un importe de S/. 1 200 cobrando una cuota inicial de S/. 200 y 11 cuotas mensuales de S/. 120. ¿Cuál es la tasa mensual de interés cargada? Rp. TEM = 4,9384%.
36. Calcule la TEM de una anualidad de 20 rentas trimestrales vencidas de S/. 4 000 cada una, cuyo valor presente es de S/. 28 989,61. Rp. TEM = 4%.
37. Un préstamo de S/. 3 545,95 debe ser amortizado con cuotas constantes mensuales vencidas, planteándose las siguientes alternativas: a) 4 cuotas de S/. 1 000; b) 6 cuotas de S/. 698,61. ¿Qué TEM se aplicó? Rp. TEM = 5%.
38. Una persona depositó en su cuenta de capitalización de una Administradora de Fondos de Pensiones (AFP), \$ 100 cada fin de mes durante 10 años. Al finalizar este plazo la AFP le informó que su fondo acumulado era de \$ 16 247,34. ¿Cuál fue el rendimiento efectivo anual de sus depósitos? Rp. TEA = 6%.
39. Un préstamo de S/. 15 925,67 se reembolsa con dos cuotas: la primera de S/. 8 000 al vencimiento del cuarto mes; y la segunda de S/. 10 000 al vencimiento del octavo mes. Calcule la tasa aplicada al préstamo. El cálculo debe efectuarlo directamente, sin tantear, por lo tanto sin interpolar. Rp. TEM 2%.

Problemas combinados

40. Una empresa solicita a un banco un préstamo de S/. 10 000 para reembolsarlo en 16 cuotas uniformes cada fin de trimestre, con una TNA

del 24% capitalizable mensualmente. Inmediatamente después de haber pagado la décima cuota decide cancelar el resto de la deuda. ¿Qué importe tendrá que cancelar al banco? Rp. S/. 4 887,68.

41. Una maestría en Administración de Negocios tiene un costo de \$ 190 por cada crédito de estudios. El plan curricular contempla 60 créditos que pueden ser aprobados satisfactoriamente en el plazo de 2 años. Roberto Rojo, estudiante de contabilidad que en la fecha le faltan 3 años para concluir su bachillerato, ha decidido seguir la maestría al término de su bachillerato. Para estos efectos, a fin de cada mes y durante los 3 años siguientes ahorrará un determinado importe constante que le permita sufragar el costo de su maestría. Considerando que Roberto puede percibir una TEM del 0,5% por sus ahorros y que los pagos de la maestría se realizarán en cuotas iguales cada fin de mes ¿cuánto debe ahorrar mensualmente Roberto? Rp. \$ 272,45.

11. Resumen del capítulo

Una *anualidad* es un conjunto de dos o más flujos, en el que a partir del segundo, los períodos de tiempo comprendidos entre un flujo y el anterior son uniformes. Un conjunto de rentas constituye una anualidad. Las anualidades pueden ser clasificadas en función de diferentes elementos.

Una anualidad es cierta cuando se conocen de antemano los elementos que la constituyen (P , R , S , n , i). Es perpetua cuando la duración de las rentas es ilimitada. Ambas anualidades pueden ser a su vez: vencidas u ordinarias, anticipadas o imposiciones y diferidas, dependiendo del inicio de realización de las rentas. Las rentas diferidas que se capitalizan al finalizar cada período de gracia (período durante el cual no se pagan principal ni intereses), pueden ser a su vez: vencidas o adelantadas.

Las anualidades eventuales o contingentes son aquéllas cuya fecha inicial o terminal dependen de algún suceso previsible pero cuya realización no puede determinarse con exactitud. Las anualidades eventuales pueden ser vitalicias cuando su duración depende de la vida del rentista, es temporal cuando termina después de un determinado número de pagos aun cuando el rentista continúe con vida.

En forma general, las anualidades pueden ser: simples, cuando las rentas coinciden con los períodos de interés; general cuando las rentas no coinciden con los períodos de interés; e impropias o variables cuando las rentas difieren unas de otras.

El conjunto de rentas que constituyen una anualidad pueden ser: capitalizadas, constituyendo el monto de una anualidad y actualizadas, constituyendo el valor presente de una anualidad. Ambos stocks: valor presente y monto, pueden ser transformados por equivalencia financiera en rentas.

Conociendo los elementos de una anualidad: P , R , S , i , puede calcularse n . Multiplicando n por el tiempo de cada período de capitalización, obtenemos el horizonte temporal. Asimismo, si se conoce P , R , S y n puede calcularse la tasa implícita de la anualidad.

El interés compuesto y las anualidades dan origen a los factores financieros:

- Factor simple de capitalización (FSC) y factor de capitalización de la serie (FCS), cuyas funciones son llevar al futuro un stock de efectivo y un conjunto de flujos de efectivo, respectivamente.
- Factor simple de actualización (FSA) y factor de actualización de la serie (FAS), cuyas funciones son traer al presente un stock futuro de efectivo y un conjunto de flujos de efectivo o rentas, respectivamente.
- Factor de recuperación del capital (FRC) y factor de depósito al fondo de amortización (FDFA), cuyas funciones son convertir un stock presente o un stock futuro de efectivo en flujos de efectivo o rentas.

Entre los seis factores financieros se da un conjunto de relaciones que facilitan la resolución de operaciones financieras.

VII

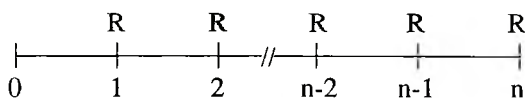
Anualidades anticipadas

Introducción

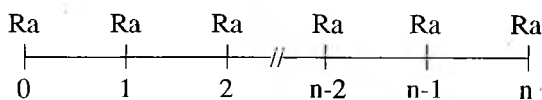
Una anualidad anticipada es una sucesión de rentas que empiezan en el momento 0, a inicios del período de renta, como sucede en el pago de alquileres, en las compras a plazos cuando debe darse una cuota inicial, en las pólizas de seguros, en las pensiones de enseñanza, etc. La diferencia entre una anualidad simple vencida y una anualidad simple anticipada, dado un número igual de rentas, radica en que en la anualidad vencida la última renta no percibe interés porque coincide con el término del plazo de la anualidad, mientras que en la anualidad anticipada la última renta no coincide con el final del plazo de la anualidad, ubicándose al inicio del último período de renta y percibiendo el interés o beneficio hasta el final del período, fecha en que concluye el plazo de la anualidad.

Esa diferencia se observa en el siguiente gráfico.

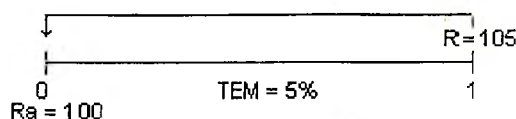
Anualidad
simple
vencida



Anualidad
simple
anticipada



Conociendo una renta vencida **R**, la renta anticipada o imposición **Ra** puede calcularse descontando a aquélla un período de renta con la tasa efectiva de ese período. Por ejemplo, si el día de hoy se decide cancelar anticipadamente la cuota de un préstamo que vence dentro de un mes y cuyo monto de S/. 105 incluye una TEM del 5%, sólo tendrá que abonarse su valor presente equivalente a S/. $100 = 105/1,05$.



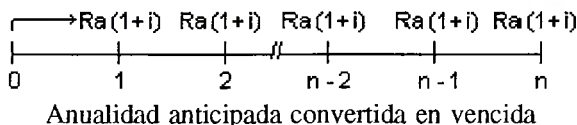
$$Ra = \frac{R}{1 + i} \quad (68)$$

$$Ra = \frac{105}{1 + 0,05} = 100$$

Del mismo modo si conocemos una **Ra** entonces podemos multiplicarla por $(1 + i)$ para convertirla en una **R**.

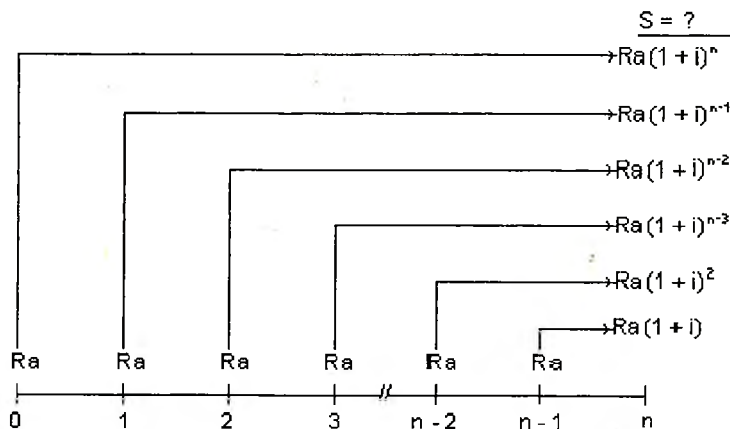
$$R = Ra (1 + i) \quad (69)$$

Entonces, una anualidad anticipada puede ser convertida en una anualidad vencida multiplicando cada una de sus Ra por $(1 + i)$. Convertida la anualidad anticipada en vencida se le puede aplicar los factores financieros de las anualidades vencidas.



1. Monto de una anualidad simple anticipada

Estableciendo una ecuación de equivalencia financiera tomando como fecha focal el final del horizonte temporal, el monto S de una anualidad anticipada puede obtenerse del modo siguiente.



Cada pago Ra está sometido a interés compuesto por n números diferentes de períodos: el primero ubicado en el momento 0, durante n períodos; el segundo durante $n - 1$ períodos; el penúltimo durante dos períodos y el último durante un período (hasta el final del horizonte temporal). El monto total de la anualidad es igual a la suma de los montos parciales de cada Ra llevado al final del horizonte temporal:

$$S = Ra(1+i) + Ra(1+i)^2 + \dots + Ra(1+i)^{n-2} + Ra(1+i)^{n-1} + Ra(1+i)^n$$

S es igual a la suma de una progresión geométrica cuyo primer término es $Ra(1+i)$, su razón $(1+i)$ y se resuelve aplicando la fórmula (5).

$$S = \frac{Ra(1+i)[(1+i)^n - 1]}{1+i-1}$$

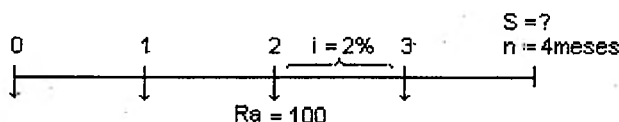
$$S = Ra(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \quad (70)$$

Se puede apreciar que el monto de una anualidad anticipada es igual al de una vencida cuya renta ha sido multiplicada por $(1 + i)$. Reemplazando (70) por las siglas conocidas tenemos:

$$S = Ra (1 + i) FCS_{i;n} \quad (70')$$

Ejemplo 1.- ¿Qué monto se acumulará al término del cuarto mes, si hoy y durante 3 meses consecutivos se depositan S/. 100 en una cuenta de ahorros percibiendo una TNA del 24% con capitalización mensual?

Solución



$$S = Ra (1 + i) FCS_{0,02;4}$$

$$S = 100(1,02)[4,121608] = 420,40$$

2. Valor presente de una anualidad simple anticipada

Estableciendo una ecuación de equivalencia financiera, tomando como fecha focal el inicio del horizonte temporal, el valor presente P de una anualidad anticipada se puede obtener igualando:

$$(70') \quad S = Ra (1 + i) FCS_{i;n} \quad \text{y} \quad (21) \quad S = P \cdot FSC_{i;n}$$

$$P \cdot FSC_{i;n} = Ra (1 + i) FCS_{i;n}$$

$$P(1 + i)^n = Ra(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

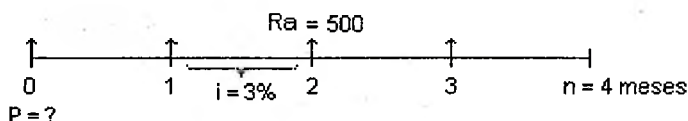
$$P = Ra(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] \quad (71)$$

Se puede apreciar que el valor presente de una anualidad anticipada es igual al de una vencida cuya renta ha sido multiplicada por $(1 + i)$. Reemplazando (71) por las siglas conocidas tenemos:

$$P = Ra (1 + i) FAS_{i;n} \quad (71')$$

Ejemplo 2.- Un local comercial es alquilado por cuatro meses con pagos anticipados de S/. 500. ¿Cuál es el valor actual del contrato de arriendo aplicando una TEM del 3%?

Solución



$$P = Ra (1 + i) FAS_{0,03;4}$$

$$P = 500(1,03)[3,717098403] = 1\,914,31$$

El mismo resultado se obtiene con la siguiente ecuación:

$$P = 500 + 500FAS_{0,03;3}$$

3. Cálculo del valor de las rentas o imposiciones en las anualidades simples anticipadas

3.1 Renta o imposición conociendo el valor futuro

Despejando R de (70') tenemos:

$$S = Ra (1 + i) FCS_{i;n}$$

$$Ra(1 + i) = S \left[\frac{1}{FCS} \right]$$

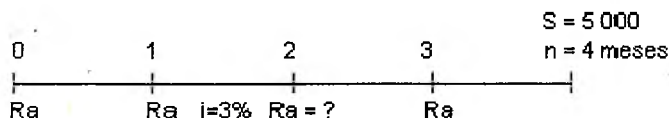
$$Ra(1 + i) = S \left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (72)$$

Reemplazando (72) por las siglas conocidas tenemos:

$$Ra(1 + i) = S. FDFA_{i;n} \quad (72')$$

Ejemplo 3.- Calcule el importe de la imposición mensual que al cabo de 4 meses permitirán acumular S/. 5 000 ganando una TEM del 3%.

Solución



$$\begin{aligned} Ra(1 + i) &= S. FDFA_{0,03;4} \\ Ra(1,03) &= 5\,000 [0,2390270452] \\ Ra &= 1\,160,33 \end{aligned}$$

3.2 Renta o imposición conociendo el valor presente

Despejando R de (71) tenemos:

$$P = Ra (1 + i) FAS_{i;n}$$

$$Ra(1 + i) = P \left[\frac{1}{FAS} \right]$$

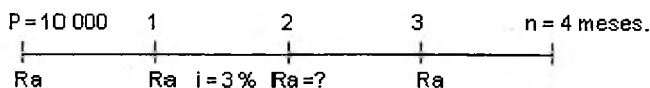
$$Ra(1 + i) = P \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (73)$$

Reemplazando (73) por las siglas conocidas tenemos:

$$Ra(1 + i) = P. FRC_{i; n} \quad (73'')$$

Ejemplo 4.- ¿Cuál será la imposición mensual constante a pagar por un préstamo bancario de corto plazo de S/. 10 000, reembosable con 4 cuotas anticipadas a una TEM del 3%? Calcule además el préstamo neto.

Solución



$$Ra(1 + i) = P. FRC_{0,03; 4}$$

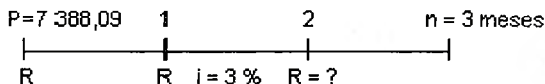
$$Ra(1,03) = 10\,000 FRC_{0,03; 4}$$

$$Ra = 2\,611,91$$

Cálculo del préstamo neto

Préstamo bruto	10 000,00
Abono de la 1a. cuota anticipada	2 611,91
Préstamo neto	7 388,09

El préstamo bruto de S/. 10 000 por el efecto de la deducción de la cuota anticipada se ha convertido en un financiamiento neto de S/. 7 388,09 al que le corresponden 3 cuotas vencidas de S/. 2 611,91.



$$R = P. FRC_{0,03; 3}$$

$$R = 7\,388,09 FRC_{0,03; 3}$$

$$R = 2\,611,91$$

4. Cálculo de n en una anualidad anticipada

A partir de la fórmulas:

$$(70') \quad S = Ra (1 + i) FCS_{i;n} \quad \text{ó} \quad (72') \quad Ra(1 + i) = S \cdot FDFA_{i;n} \text{ y}$$

$$(71') \quad P = Ra (1 + i) FAS_{i;n} \quad \text{ó} \quad (73') \quad Ra(1 + i) = P \cdot FRC_{i;n}$$

podemos calcular el número de períodos capitalizables n , ya sea interpolando valores o despejando esta incógnita directamente de cualquiera de las fórmulas señaladas anteriormente.

4.1 Obtención de n a partir del FCS o FDFA

Ya que el FCS y el FDFA son recíprocos, el despeje de n a partir de las fórmulas (70) ó (72) nos dará el mismo resultado:

$$S = Ra(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

$$\frac{Si}{Ra(1 + i)} + 1 = (1 + i)^n$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{Si}{Ra(1 + i)} + 1 \right]}{\text{Log}(1 + i)} \quad (74)$$

4.2 Obtención de n a partir del FRC o FAS

Ya que el FRC y el FAS son recíprocos, el despeje de n a partir de las fórmulas (71) ó (73) nos dará el mismo resultado:

$$Ra = \frac{P}{(1 + i)} \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

$$Ra(1+i) = P \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right]$$

$$Ra(1+i) [(1 - (1+i)^{-n})] = Pi$$

$$- (1+i)^{-n} = \frac{Pi}{Ra(1+i)} - 1$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{Pi}{Ra(1+i)}$$

$$n = - \frac{\text{Log} \left[1 - \frac{Pi}{Ra(1+i)} \right]}{\text{Log}(1+i)} \quad (75)$$

Ejemplo 5.- ¿Cuántas imposiciones mensuales de S/. 500 serán necesarias ahorrar, para acumular un monto de S/. 5 584,36 en un banco que paga una TNA del 24% con capitalización mensual?

Solución

$$n = ?$$

$$i = 0,02$$

$$Ra = 500$$

$$S = 5\,584,36$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{Si}{Ra(1+i)} + 1 \right]}{\text{Log}(1+i)}$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{5\,584,36 \times 0,02}{500} + 1 \right]}{\text{Log}(1 + 0,02)} = 10$$

Ejemplo 6.- ¿Con cuántas imposiciones trimestrales de S/. 500 se podrá amortizar un préstamo de S/. 5 000? La entidad financiera cobra una TET del 6,1208%.

Solución

$$n = ?$$

$$i = 0,061208$$

$$Ra = 500$$

$$P = 5\,000$$

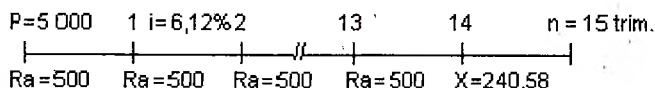
$$n = - \frac{\text{Log} \left[1 - \frac{Pi}{Ra(1+i)} \right]}{\text{Log}(1+i)}$$

$$n = - \frac{\text{Log} \left[1 - \frac{5\,000 \times 0,061208}{500 \times 1,061208} \right]}{\text{Log}(1+0,061208)} = 14,47375682$$

Ya que no es aplicable pactar un crédito a 14,47 trimestres, la presente operación puede realizarse con 14 imposiciones: 13 de S/. 500 y la última de un importe mayor, o con 15 imposiciones: 14 de S/. 500 y la última de un importe menor. Adoptando esta última decisión la equivalencia financiera puede plantearse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} P &= Ra(1,061208).FAS_{0,061208;14} + X(1,061208).FSA_{0,061208;15} \\ 5\,000 &= 500(1,061208).FAS_{0,061208;14} + X(1,061208).FSA_{0,061208;15} \\ 5\,000 &= 4\,895,27 + 0,4353041284X \\ 104,73 &= 0,3865376086X \\ X &= 240,58 \end{aligned}$$

El diagrama de tiempo-valor de la *anualidad impropia* o variable es el siguiente:

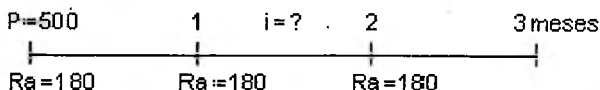


5. Cálculo de la tasa de interés de una anualidad anticipada

De modo similar a lo trabajado en el capítulo de anualidades vencidas, cuando en una anualidad se conocen todas las variables intervinientes a excepción de la tasa efectiva periódica, entonces ésta puede hallarse planteando la ecuación de equivalencia y buscando el valor de la tasa, aplicando algún método de interpolación.

Ejemplo 7.- Un artefacto electrodoméstico tiene un precio de \$ 500 al contado. Al crédito se ofrece con tres cuotas mensuales adelantadas de \$ 180 ¿Cuál es la TEM cargada en el financiamiento?

Solución



$$i = ?$$

$$P = 500$$

$$n = 3$$

$$Ra = 180$$

$$P = Ra (1 + i) \cdot FAS_{i;n}$$

$$500 = 180(1 + i) FAS_{i;3}$$

i	Valor
8%	500,987654
?	500,000000
9%	496,640013

$$a = \frac{c}{d} \quad b \quad a = \frac{0,987654}{3,3599865} = 0,2939458239$$

$$i = 8 + 0,29 = 8,29\%$$

Observando el diagrama de flujo de caja se puede plantear una ecuación de flujos vencidos, con la cual se obtiene el mismo resultado:

$$500 - 180 = 180FAS_{i;2}$$

$$i = 8,29\%$$

6. Listado de fórmulas

$$Ra = \frac{R}{(1 + i)}$$

(68) Renta adelantada en función de una renta vencida

$$R = Ra (1 + i)$$

(69) R en función de una Ra

$$S = Ra(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \quad (70) \quad \text{Monto de una anualidad anticipada}$$

$$S = Ra(1 + i)FCS_{i;n} \quad (70') \quad \text{Monto de una anualidad anticipada}$$

$$P = Ra(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] \quad (71) \quad \text{Valor presente de una anualidad anticipada}$$

$$P = Ra(1 + i)FAS_{i;n} \quad (71') \quad \text{Valor presente de una anualidad}$$

$$Ra(1 + i) = S \left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (72) \quad \text{Imposición en función de S}$$

$$Ra(1 + i) = S.FDFA_{i;n} \quad (72') \quad \text{Imposición en función de S}$$

$$Ra(1 + i) = P \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (73) \quad \text{Imposición en función de P}$$

$$Ra(1 + i) = P.FRC_{i;n} \quad (73') \quad \text{Imposición en función de P}$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{Si}{Ra(1 + i)} + 1 \right]}{\text{Log}(1 + i)} \quad (74) \quad \text{Tiempo en función del FCS o FDFA}$$

$$n = - \frac{\text{Log} \left[1 - \frac{Pi}{Ra(1 + i)} \right]}{\text{Log}(1 + i)} \quad (75) \quad \text{Tiempo en función del FRC o FAS}$$

7. Problemas propuestos

1. Utilizando la progresión geométrica deduzca la fórmula del valor presente de una anualidad anticipada.

2. Demuestre que:

$$(a) \quad \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] - 1 = (1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

$$(b) \quad \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] = (1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right]$$

3. Considerando un capital inicial de S/. 1 000, una TNA del 36% con capitalización mensual y cuatro imposiciones de 30 días cada una, calcule Ra, S y P aplicando el FRC, FCS, FDFA y FAS. Rp. P = S/. 1 000; Ra = S/. 261,19; S = S/. 1 125,51.
4. Utilizando una TEM del 3% y 12 imposiciones mensuales de S/. 1,00 c/u calcule el FRC, FCS, FDFA y FAS. Rp. FAS = 10,25262411; FRC = 0,0975360053; FDFA = 0,06840979171; FCS = 14,61779045.
5. Sustituya una serie de 4 cuotas mensuales uniformes vencidas de S/. 500 por otra equivalente con pagos anticipados. Utilice una TEM del 4%. Rp. Ra = S/. 480,77.
6. Sustituya una serie de 4 imposiciones mensuales uniformes de S/. 480,77 por otra equivalente con pagos anticipados. Utilice una TEM del 4%. Rp. R = S/. 500.

S = Ra (1 + i) FCS

7. Si se efectúan cuatro depósitos de inicio de mes de S/. 1 000 c/u en una institución bancaria que paga una TNA del 36% con capitalización mensual, ¿qué importe se acumulará al final del cuarto mes? Rp. S = S/. 4 309,14.
8. El primer día útil de cada mes la compañía Prodinsa coloca en un banco el 20% de sus excedentes de caja ascendentes a S/. 500. Si por dichos depósitos percibe una TEM del 3%, ¿cuánto habrá acumulado al término del sexto mes? Rp. S = S/. 331,23.

P = Ra (1 + i) FAS

9. El alquiler de un local comercial es de S/. 500, pago que debe efectuarse a inicios de cada mes. El dueño del local le propone al arrendatario

- efectuar un descuento del 4% mensual en el caso que le abone anticipadamente los alquileres de un año. Calcule el valor presente de los doce pagos anticipados. $P = S/. 4\,880,24$.
10. Un crédito mutual fue contratado para ser amortizado con 20 imposiciones trimestrales fijas de S/. 250 a una TNA del 36%. Al vencimiento de la imposición 12, el cliente decide cancelarla conjuntamente con las cuotas insolutas, ¿cuál es el importe total a cancelar en esa fecha? Rp. $P = S/. 1\,633,70$.
 11. Calcule el precio de contado de una maquinaria vendida al crédito en 12 cuotas mensuales anticipadas de S/. 200 utilizando una TEM del 2%. Rp. $P = S/. 2\,157,37$.
 12. Calcule el importe total del interés a pagar en la amortización de un préstamo pactado a una TEM del 4% durante medio año con imposiciones iguales mensuales de S/. 500. Rp. $I = S/. 274,09$.
 13. Para la adquisición de una máquina se dispone del 20% de su precio de contado. El saldo será financiado por el mismo proveedor con 12 imposiciones iguales mensuales de S/. 500 c/u cargando una TEM del 3%. Calcule el precio de contado equivalente de la máquina. Rp. $P = S/. 6\,407,89$.

$$Ra(1 + i) = S. FDFA$$

14. La compañía Jacobs ha tomado la decisión de adquirir dentro de seis meses contados a partir de hoy, una nueva camioneta para distribuir sus productos (el precio de la camioneta se estima en \$ 13 000). Para este efecto averigua que sus ahorros pueden percibir una TEM del 4%. Si Jacobs decide ahorrar una determinada cantidad uniforme a inicio de cada mes, calcule el importe de la cuota que le permita formar dicho fondo. Rp. $Ra = \$ 1\,884,52$.
15. Se estima que dentro de 4 meses deberá adquirirse una máquina cuyo precio será de S/. 5 000. ¿Cuánto deberá depositarse el primer día de cada mes durante ese período de tiempo, en un banco que paga una TEM del 5%, a fin de comprar dicha máquina con los ahorros capitalizados? Rp. $Ra = S/. 1\,104,82$.
16. Calcule el importe de la imposición uniforme que colocada cada mes en un banco ganando una TEM del 4,5% nos permita acumular un fondo para sustituir una maquinaria cuyo costo se estima en S/. 4 000. La máquina tiene una vida útil de 4 años y un valor de salvamento (valor

de recuperación al final de su vida útil), equivalente al 20% de su costo de adquisición. Rp. Ra = S/. 18,95.

$$Ra(1 + i) = P. \text{ FRC}$$

17. Un préstamo de S/. 5 000 debe cancelarse en 12 cuotas uniformes mensuales anticipadas pagando una TNA del 36% capitalizable mensualmente. Calcule el importe de cada cuota. Rp. Ra = S/. 487,68.
18. La empresa Equipos S.A. vende sus máquinas al contado en \$ 10 000 pero debido a que ha conseguido un financiamiento del exterior está planeando efectuar ventas al crédito con una cuota inicial y seis cuotas mensuales uniformes, todas iguales. Si la TEA que se piensa cargar al financiamiento es del 25%, calcule el importe de las cuotas del programa de ventas a plazo. Rp. Ra = \$ 1 509,49.
19. La empresa Eletrofax dedicada a la comercialización de grupos electrógenos, los mismos que tienen un precio de contado de \$ 3 000, está planeando efectuar ventas al crédito sin cuota inicial y seis cuotas mensuales uniformes anticipadas cargando una TEM del 4%. ¿Cuál será el importe de cada cuota? Rp. P = \$ 550,27.

Cálculo de n (FCS y FDFA)

20. ¿En cuánto tiempo podrá acumularse un monto de S/. 2 000 efectuando depósitos quincenales anticipados de S/. 150? El banco paga una TNA del 24% capitalizable mensualmente. Rp. En 12,46560198 quincenas.
21. ¿Cuántos depósitos mensuales anticipados S/. 250 deben efectuarse en un banco para formar un monto de S/. 2 000, si se percibe una TEM del 3%? Rp. n = 7,08614972.

Cálculo de n (FRC y FAS)

22. ¿Cuántas cuotas mensuales anticipadas de S/. 1 650 serán necesarias para cancelar un préstamo de S/. 8 500? La deuda ha sido contraída en un banco que cobra una TNA del 24% con capitalización trimestral. Rp. n = 5,3726304.
23. Un artefacto electrodoméstico tiene un precio de \$ 1 200 al contado. Para incrementar las ventas se piensa ofrecerlo al crédito sin cuota inicial y con cuotas mensuales iguales anticipadas de \$ 100. ¿Cuántas cuotas debe

tener ese programa de crédito al que se le carga una TEM del 4%? Rp.
 $n = 15,7834766$.

Cálculo de la tasa de interés

24. Por campaña escolar una casa comercial ofrece "paquetes escolares" por un importe de S/. 1 200 cobrando 12 cuotas mensuales anticipadas de S/. 120 c/u ¿Cuál es la TEM cargada? Rp. TEM = 3,5031%.
25. Una máquina puede adquirirse al cash en S/. 2 500 y al crédito con 6 cuotas iguales mensuales anticipadas de S/. 450. Calcule la TNA. Rp. TNA = 38,2256%.

8. Resumen del capítulo

Una anualidad anticipada es una serie de flujos o rentas que empiezan a inicios del período de renta. Son ejemplos de anualidades anticipadas: el pago de alquileres, pensiones de enseñanza, pólizas de seguros de vida, etc. En un mismo horizonte temporal, con iguales importes de rentas y tasas, la diferencia entre una anualidad vencida y otra anticipada radica en que en el primer caso, la renta vence al final de cada período, mientras que en el segundo, la renta vence a inicios del período, lo que origina en el momento 0 un desembolso menor al pactado ($P - R$), y en el último período, el derecho a percibir el beneficio hasta su vencimiento, como sucede, por ejemplo, con las pensiones de enseñanza.

Conociendo una renta vencida R , la renta anticipada o imposición R_a puede calcularse descontando a aquélla un período de renta con la tasa efectiva de ese período; recíprocamente una renta anticipada puede ser convertida en vencida capitalizándola durante un período. Convirtiendo una anualidad anticipada en vencida, le son aplicables las fórmulas de las anualidades vencidas.

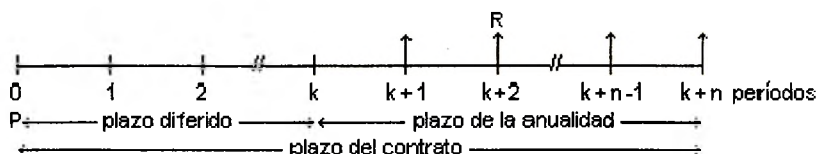
VIII

Anualidades diferidas

Introducción

Cuando en un contrato de crédito u operación similar, por acuerdo expreso de los contratantes, el pago de las rentas empieza después del vencimiento de uno o varios períodos de renta, contados a partir del inicio del plazo pactado, se está ante el caso de una anualidad diferida. Durante el *plazo diferido* k , que es el tiempo que media entre el inicio del contrato y el primer pago -contado en períodos de renta-, el capital inicial es capitalizado al vencimiento de cada período diferido, para luego distribuirlo entre el número de cuotas insolutas del préstamo. Por lo tanto, al vencimiento del plazo diferido, una anualidad diferida se convierte en una anualidad vencida o anticipada, a la cual le es aplicable los factores financieros vencidos o anticipados respectivamente.

Anualidad simple diferida vencida



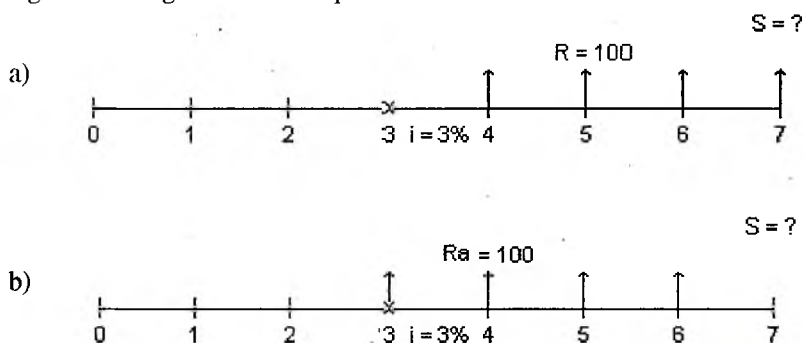
1. Monto de las anualidades simples diferidas: vencida y anticipada

Ya que una anualidad simple diferida vencida es una clase particular de anualidad simple vencida, y una anualidad simple diferida anticipada es una clase particular de anualidad simple anticipada, les son aplicables las fórmulas (62) y (70), respectivamente.

(62) $S = R \cdot FCS_{i;n}$ Monto de una anualidad simple diferida vencida

(70) $S = Ra(1 + i) FCS_{i;n}$ Monto de una anualidad simple diferida anticipada

Ejemplo 1.- Con una TEM del 3% y $n = 7$ meses calcule el monto en los siguientes diagramas de tiempo-valor:



Solución

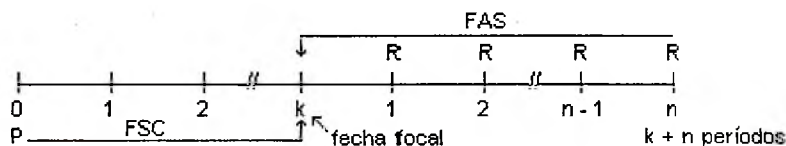
$$a) S = 100 FCS_{0.03;4} = 418,36$$

$$b) S = 100(1,03) FCS_{0.03;4} = 430,91$$

2. Valor presente de una anualidad simple diferida vencida

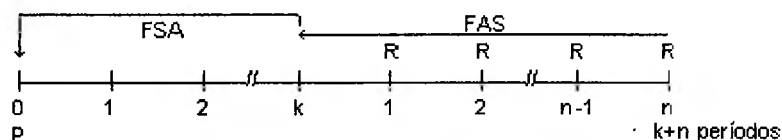
El valor presente de una anualidad diferida vencida puede ser obtenido:

- a) Tomando como fecha focal el final del plazo diferido k , en este punto la ecuación de equivalencia se obtiene igualando el principal capitalizado con el conjunto de rentas futuras actualizadas:



$$P(1 + i)^k = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right]$$

- b) Tomando como fecha focal el momento 0, en este punto la ecuación de equivalencia se obtiene actualizando transitoriamente las rentas al final del plazo diferido k aplicando un FAS y de allí ese importe o stock futuro debe ser traído al presente con un FSA.



$$P = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] (1 + i)^{-k}$$

Ambas ecuaciones a) y b) obtienen el valor presente de una anualidad diferida vencida.

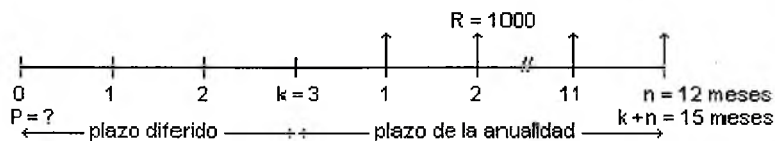
$$P = R \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] (1 + i)^{-k} \quad (76)$$

Reemplazando (76) por sus siglas respectivas tenemos:

$$P = R \cdot \text{FAS}_{i;n} \text{FSA}_{i;k} \quad (76')$$

Ejemplo 2.- Calcule el valor presente de una renta ordinaria de S/. 1 000 mensual a recibirse después de transcurridos tres meses y durante el plazo de un año. Utilice una TEM del 4%.

Solución



$$P = ?$$

$$R = 1\,000$$

$$k = 3$$

$$n = 12$$

$$TEM = 0,04$$

$$P = R \cdot FAS_{i;n} \cdot FSA_{i;k}$$

$$P = 1\,000 \cdot FAS_{0,04;12} \cdot FSA_{0,04;3}$$

$$P = 1\,000 \times 9,385073759 \times 0,8889963587$$

$$P = 8\,343,30$$

3. Valor presente de una anualidad simple diferida anticipada

Si en la ecuación (76) reemplazamos la renta vencida R , por la renta anticipada equivalente: $Ra(1 + i)$, obtendremos el valor presente de una anualidad diferida anticipada.

$$P = Ra(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] (1 + i)^{-k}$$

$$P = Ra(1 + i)^{1-k} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] \quad (77)$$

Reemplazando (77) por sus siglas respectivas tenemos:

$$P = Ra(1 + i)^{1-k} FAS_{i;n} \quad (77')$$

Ejemplo 3.- ¿Qué capital debe colocarse hoy en un banco a una TEM del 4%, para disponer, después de transcurrido un año, una renta mensual de S/. 500 al comienzo de cada mes, durante los cinco años siguientes?

Solución



$$P = ?$$

$$i = 4\%$$

$$k = 12$$

$$Ra = 500$$

$$n = 60$$

$$P = Ra (1 + i)^{1-k} \text{ FAS}_{i;n}$$

$$P = 500(1,04^{1-12}) \text{ FAS}_{0,04;60}$$

$$P = 500[14,69578769]$$

$$P = 7347,89$$

4. Cálculo del valor de las rentas en las anualidades diferidas simples: vencidas y anticipadas

Las rentas en función de S , ya sean de una anualidad diferida vencida o de una anualidad diferida anticipada, se obtienen del mismo modo que sus similares no diferidos. Por lo tanto le son aplicables las fórmulas (64') y (72'), respectivamente.

$$(64') R = S \cdot \text{FDFA}_{i;n}$$

Renta de una anualidad vencida

$$(72') Ra(1 + i) = S \cdot \text{FDFA}_{i;n}$$

Renta de una anualidad anticipada

Las rentas diferidas, vencidas y anticipadas, ambas en función de P , se obtienen despejando R de las fórmulas (76') y (77'), respectivamente.

Renta diferida vencida

Despejando R de (76') $P = R \cdot \text{FAS}_{i;n} \text{ FSA}_{i;k}$ obtenemos la renta de una anualidad diferida vencida:

$$R = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] (1+i)^k \quad (78)$$

Reemplazando (78) por sus siglas respectivas tenemos:

$$R = P \cdot \text{FRC}_{i;n} \text{FSC}_{i;k} \quad (78')$$

Renta diferida anticipada

Despejando R de (77') $P = Ra (1+i)^{1-k} \text{FAS}_{i;n}$ obtenemos la renta de una anualidad diferida anticipada:

$$Ra = P (1+i)^{k-1} \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (79)$$

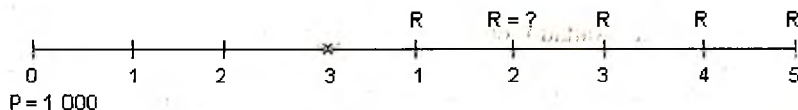
Reemplazando (79) por sus siglas respectivas tenemos:

$$Ra = P (1+i)^{k-1} \text{FRC}_{i;n} \quad (79')$$

Ejemplo 4.- Calcule el importe de las rentas diferidas vencidas y anticipadas considerando $P = S/. 1\,000$; $k = 3$ meses; $n = 5$ meses; $i = 0,02$.

Solución .

a) Renta diferida vencida



$$\begin{aligned} R &= P \cdot \text{FRC}_{i;n} \text{FSC}_{i;k} \\ R &= 1\,000 \cdot \text{FRC}_{0,02;5} \text{FSC}_{0,02;3} \\ R &= 1\,000 \times 0,2121583941 \times 1,061208 = 225,14 \end{aligned}$$

b) Renta diferida anticipada



$$Ra = P(1 + i)^{k-1} FRC_{i;n}$$

$$Ra = 1\,000(1,02^2) FRC_{0,02;5}$$

$$Ra = 1000 \times 1,0404 \times 0,2121583941 = 229,65$$

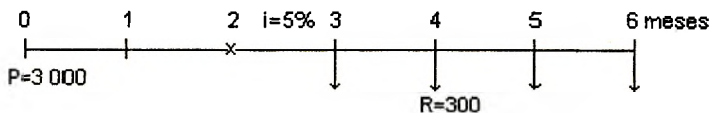
5. Cálculo de n e i en una anualidad diferida

El cálculo de n e i se efectúa en forma similar a lo desarrollado en los capítulos de anualidades vencidas y de anualidades anticipadas.

6. Problemas resueltos

- Un activo fijo es adquirido con una cuota inicial de S/. 3 000 y cuatro cuotas mensuales diferidas vencidas de S/. 300 c/u las cuales se deberán empezar a amortizar a partir del tercer mes; si la TEM es del 5% ¿cuál sería el precio de contado de dicho activo?

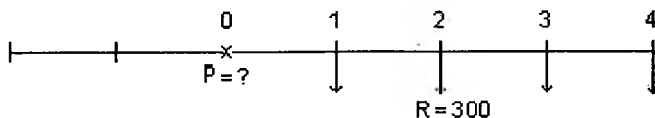
Solución



a) Aplicando factores financieros

El precio de contado en el momento 0 se puede hallar trayendo transitoriamente la serie uniforme al final del período diferido (momento 2) aplicándole un FAS. El stock de efectivo en ese momento se traerá al momento 0 con un FSA, donde se le sumará los S/. 3 000 que ya están en el presente. Si seguimos paso a paso el proceso numerando nuevamente el diagrama tenemos:

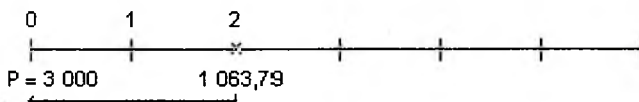
- 1) Traer transitoriamente la serie uniforme al momento 2



$$P = R \cdot FAS_{0,05;4}$$

$$P = 300[3,545950504] = 1\,063,79$$

- 2) Traer el stock de efectivo del momento 2 al momento 0



$$P = S \cdot FSA_{0,05;2}$$

$$P = 1\,063[0,9070294785] = 964,88$$

- 3) Sumar el stock de efectivo del presente con los flujos traídos del futuro.

$$P = 3\,000 + 964,88 = 3\,964,88$$

- 4) La ecuación directa se opera con los factores múltiples FAS y FSA:

$$P = 3\,000 + 300 \cdot FAS_{0,05;4} \cdot FSA_{0,05;2}$$

$$P = 3\,000 + 300[3,216281636] = 3\,964,88$$

- b) Aplicando la fórmula del valor presente de una anualidad diferida vencida

$$P = ?$$

$$R = 300$$

$$k = 2$$

$$n = 4$$

$$i = 0,05$$

$$P = R \cdot FAS_{i;n} \cdot FSA_{i;k} + 3\,000$$

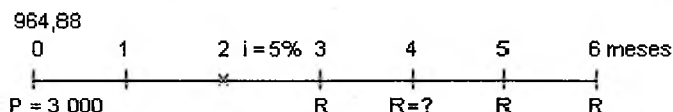
$$P = 300 \cdot FAS_{0,05;4} \cdot FSA_{0,05;2}$$

$$P = 300 \times 3,545950504 \times 0,9070294785 + 3\,000$$

$$P = 3\,964,88$$

2. La empresa Máquinas Industriales vende compresoras mod. T230 a un precio de contado de S/. 3 964,88. Al crédito exige una cuota inicial de S/. 3 000 y el saldo lo negocia de acuerdo con las propuestas del comprador cobrando una TEM del 5%. Si un cliente solicita pagar la diferencia en cuatro cuotas fijas cada fin de mes empezando a pagar tres meses después de la cuota inicial, ¿cuál será la cuota fija a pagar por el cliente?

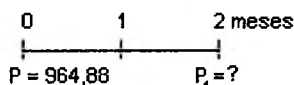
Solución



El importe a financiar es el saldo de S/. 3 964,88 menos la cuota inicial de S/. 3 000, lo cual asciende a S/. 964,88. La cuota fija puede ser hallada:

a) Aplicando factores financieros

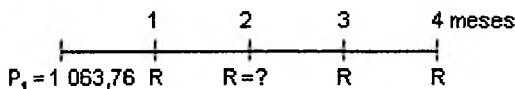
- 1) Llevar el stock inicial al momento 2



$$P_1 = 964,88 \text{ FSC}_{0,05; 2}$$

$$P_1 = 964,88[1,1025] = 1\,063,76$$

- 2) Transformar el monto del momento 2 en una anualidad equivalente



$$R = 1\,063,76 \text{ FRC}_{0,05; 4}$$

$$R = 1\,063,76[0,2820118326] = 300$$

3) La ecuación directa se opera con los factores múltiples FSC y FRC:

$$R = 964,88 \text{ FSC}_{0,05;2} \cdot \text{FRC}_{0,05;4}$$

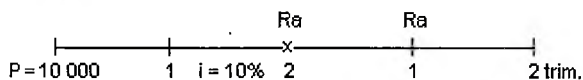
$$R = 964,88[0,3109180454] = 300$$

b) Aplicando la fórmula de la renta diferida vencida

$R = ?$	$R = P \cdot \text{FRC}_{i;n} \cdot \text{FSC}_{i;k}$
$P = 964,88$	$R = 964,88 \text{ FRC}_{0,05;4} \cdot \text{FSC}_{0,05;2}$
$k = 2$	$R = 964,88 \times 0,2820118326 \times 1,1025$
$n = 4$	$R = 300$
$i = 0,05$	

3. La compañía Phi solicita al Banco Latino un préstamo de S/. 10 000 para cancelarlo en cuatro períodos trimestrales anticipados a una TNA del 40% con capitalización trimestral. Si la gerencia de Phi consigue el diferimiento de las dos primeras cuotas sin variar el plazo del crédito, ¿a cuánto ascenderá el importe de las cuotas uniformes restantes?

Solución



$Ra = ?$	$Ra = P(1 + i)^{k-1} \text{FRC}_{i;n}$
$P = 10\ 000$	$Ra = 10\ 000 (1,1)^{2-1} \text{FRC}_{0,1;2}$
$k = 2$	$Ra = 10\ 000 \times 1,1 \times 0,5761904762$
$n = 2$	$Ra = 6\ 338,10$
$i = 0,1$	

7. Listado de fórmulas

Anualidades diferidas vencidas

$$S = R \cdot \text{FCS}_{i;n} \quad (62') \text{ Monto}$$

$$P = R \left[\frac{1}{(1 + i)^k} \right] \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] \quad (76) \text{ Valor presente}$$

$$P = R(1 + i)^{-k} FAS_{i;n} \quad (76') \text{ Valor presente}$$

$$R = S F DFA_{i;n} \quad (64') \text{ Renta en función de S}$$

$$R = P(1 + i)^k \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (78) \text{ Renta en función de P}$$

$$R = P(1 + i)^k FRC_{i;n} \quad (78') \text{ Renta en función de P}$$

Anualidades diferidas anticipadas

$$S = Ra(1 + i) FCS_{i;n} \quad (70') \text{ Monto}$$

$$P = Ra(1 + i)^{1-k} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right] \quad (77) \text{ Valor presente}$$

$$P = Ra(1 + i)^{1-k} FAS_{i;n} \quad (77') \text{ Valor presente}$$

$$Ra = S(1 + i)^{-1} F DFA_{i;n} \quad (72') \text{ Imposición en función de S}$$

$$Ra = P(1 + i)^{k-1} \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (79) \text{ Imposición en función de P}$$

$$Ra = P(1 + i)^{k-1} FRC_{i;n} \quad (79') \text{ Imposición en función de P}$$

8. Problemas propuestos

- Utilizando la progresión geométrica deduzca la fórmula del valor presente de: a) una anualidad diferida vencida, b) una anualidad diferida anticipada.

$$\text{a) } P = R \cdot FAS_{i;n} \cdot FSA_{i;k} \quad \text{b) } P = Ra(1 + i)^{1-k} FAS_{i;n}$$

2. Efectúe las seis transformaciones financieras equivalentes, considerando un capital inicial de S/. 100 en el momento 0, una TNA del 36% con capitalización mensual, 4 períodos diferidos mensuales y 6 rentas vencidas uniformes mensuales. Rp. $P = S/. 100$; $S = S/. 134,39$; $R = S/. 20,78$.
3. Resuelva el problema 2 considerando las 6 rentas anticipadas. Rp. $P = S/. 100$; $S = S/. 134,39$; $R_a = S/. 20,17$.
4. Utilizando una TEM del 3%, 4 períodos mensuales diferidos y 6 imposiciones mensuales de S/. 1,00 c/u calcule los valores de los 6 factores financieros. Rp. $FSC = 1,343916379$; $FSA = 0,7440939151$; $FAS = 4,95749797565$; $FRC = 0,201714673$; $FDFA = 0,1500946606$; $FCS = 6,662462181$.

Valor presente de una anualidad diferida vencida

5. Calcule el valor presente de una anualidad compuesta de 24 períodos trimestrales vencidos, de los cuales los 4 primeros son diferidos. El importe de cada renta uniforme con vencimiento trimestral es de S/. 2 500, y la TEA aplicada es 36%. Rp. $P = S/ 18 060,08$.
6. El proceso de fabricación e instalación de una máquina tendrá una duración de 5 meses. A partir del fin del sexto mes producirá una ganancia neta mensual de S/. 500 durante 24 meses, ¿cuál será el valor presente de dichos flujos considerando una TEM del 3% durante los primeros 5 meses y del 4% para los meses restantes? Rp. $P = S/. 6 576,08$.
7. El Hotel Maranga Inn estará terminado dentro de un año, fecha a partir de la cual se proyecta por 10 años tener ingresos netos mensuales de \$ 2 000. Calcule el valor presente de esos flujos considerando una TEA del 20%. Rp. $P = \$ 91 282,76$.
8. Calcule el importe que debe depositarse hoy en un banco, el cual permitirá retirar dentro de tres meses y durante un período consecutivo de nueve meses una renta de S/. 500. La TEM es del 4%. Rp. $P = S/. 3 437,19$.
9. ¿Hasta qué importe una persona podrá endeudarse con un banco hoy, si se compromete a pagar S/. 1 000 durante ocho cuotas trimestrales, empezando a amortizar el préstamo dentro de medio año y pagando una TEM del 4%? Rp. $P = S/. 4 342,16$.

10. Calcule el precio de contado de una maquinaria vendida al crédito con una cuota inicial del 30% y el saldo amortizable en 8 cuotas constantes mensuales vencidas de S/. 800, cuyo primer vencimiento será dentro de 3 meses. La TEM aplicable es del 4%. Rp. $P = S/. 7\,114,06$.

Valor presente de una anualidad diferida anticipada

11. Calcule nuevamente el valor presente del problema (6) si la ganancia neta mensual se empieza a percibir a inicios del sexto mes. Rp. $P = S/. 6\,839,13$.
12. Para cubrir las pensiones que demanden la instrucción superior de su hijo, un padre decide colocar hoy un determinado capital con el objeto que dentro de tres años, al comienzo de cada mes durante cinco años le permita retirar \$ 200. Si la TEA es del 20%, ¿cuál debe ser el importe del capital a colocar? Rp. $P = S/. 4\,591,08$.
13. En una transacción comercial un cliente conviene con su acreedor cancelar su deuda efectuando un pago inicial de S/. 2 000 y S/. 1 000 al comienzo de cada mes empezando dentro de 6 meses, hasta completar S/. 10 000. Si el cliente decidiese efectuar todo el pago al contado ¿qué importe debe cancelar, considerando una TEM del 3%? Rp. $P = S/. 9\,578,97$.
14. El valor presente de una anualidad vencida compuesta de 8 rentas semestrales a una TEA del 24% es de S/. 8 000. Calcule el valor presente de una anualidad diferida anticipada compuesta de 16 rentas trimestrales, de las cuales las cuatro primera son diferidas, aplicando una TEM del 3%. La renta diferida anticipada debe ser los $\frac{2}{3}$ de la renta vencida. Rp. $P = S/. 5\,681,74$.

Renta de una anualidad diferida vencida.

15. Calcule el importe de la cuota fija trimestral vencida a pagar en un financiamiento de S/. 10 000 otorgado por una entidad financiera a una TEA del 40%, el cual debe ser amortizado en 4 periodos trimestrales, de los cuales los dos primeros son diferidos. Rp. $R = S/. 6\,705,76$.

Cálculo del plazo diferido

16. Calcule el plazo diferido a otorgar en un financiamiento de S/. 11 166,33 cobrando una TEM del 5% para reembolsarse con 8 cuotas mensuales vencidas de S/. 2 000 c/u. Rp. $k = 3$ meses.
17. Si el día de hoy efectuamos un depósito de S/. 10 000, calcule el plazo diferido a partir del cual se podrá percibir una renta vencida de S/. 1 000 mensuales durante 36 meses a una TEM del 4%. Rp. $k = 16,2417988$ meses.
18. Si hoy se efectúa un depósito de S/. 10 000 en un banco, calcule el plazo diferido necesario para percibir una renta mensual anticipada de S/. 1 000 durante 12 meses. Considere una TEM del 2%. Rp. $k = 3,824872545$ meses.
19. Calcule el plazo diferido de una anualidad diferida anticipada de 18 rentas mensuales de S/. 4 000 cada una, para que su valor presente a una TEM del 3% sea equivalente al valor presente de una anualidad vencida de 12 rentas mensuales de S/. 3 000 a la misma tasa. Rp. $k = 21,67071393$ meses.

9. Resumen del capítulo

Una anualidad diferida es un conjunto de rentas cuyo primer pago empieza después de uno o más períodos de renta, tramo denominado intervalo de aplazamiento o plazo diferido. Durante el plazo diferido k , el capital inicial es capitalizado al vencimiento de cada período de pago. El plazo total está constituido por la suma del plazo diferido y el plazo de la anualidad. Concluido el plazo diferido la anualidad se convierte en vencida o anticipada de acuerdo a como venza la renta: a fin o término de período, respectivamente.

El monto de una anualidad diferida vencida o anticipada es el mismo que le corresponde a sus similares no diferidos. El valor presente puede ser obtenido tomando como fecha focal el final del plazo diferido o el momento 0. Las rentas en función de S se calculan del mismo modo que en las anualidades no diferidas, ya sean vencidas o anticipadas. Las rentas en función de P se obtienen despejándolas de sus correspondientes valores presentes.

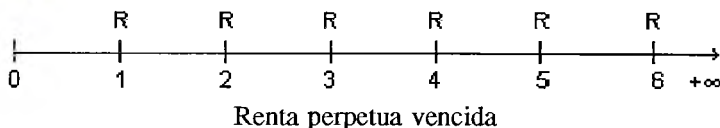
IX

Rentas perpetuas

Introducción

Una perpetuidad es una anualidad en la que el número de rentas no tiene un fin determinado, como sucede por ejemplo, con los dividendos que otorgan las sociedades anónimas cuyo plazo de operación se supone indefinido. Las rentas perpetuas, al igual que las temporales pueden ser vencidas, anticipadas y diferidas.

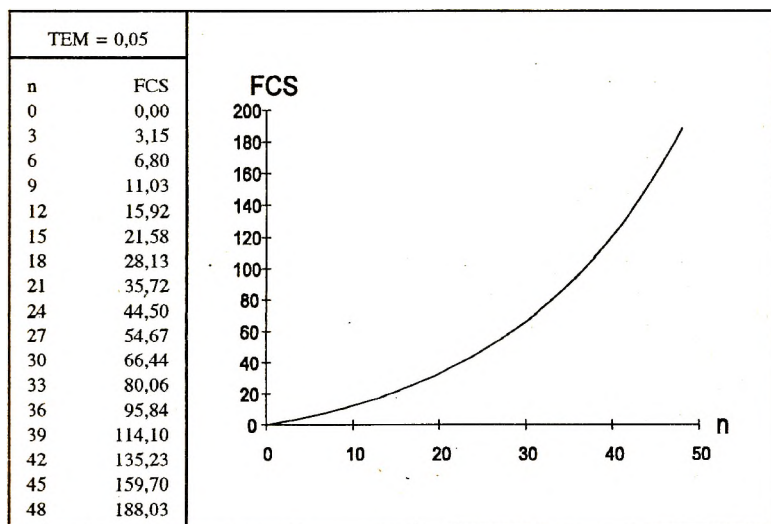
El esquema de la clasificación de las perpetuidades es el mismo que el de las anualidades ciertas temporales con su extremo derecho abierto que indica su fin no determinado.



1. Monto de una perpetuidad

Ya que el número de rentas uniformes que componen una perpetuidad no tiene límite, es imposible calcular su monto. El FCS que lleva al futuro una serie uniforme tiende a $+\infty$ (más infinito) cuando n también tiende a $+\infty$. Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} FCS = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = +\infty$$



2. Cálculo del valor de las rentas en una perpetuidad simple

De primera impresión la palabra "perpetuidad" sugiere flujos de una duración infinita o sin límite. Sin embargo más apropiado es indicar que una perpetuidad está constituida por un conjunto de rentas cuyo número no se puede determinar exactamente, ya que tiende al infinito.

Asumamos que una persona abre una libreta de ahorros con un depósito inicial de S/. 10 000 en un banco que paga una TEM del 3%. Este importe le permitirá retirar indefinidamente una renta mensual R de S/. 300. Al vencimiento del primer mes puede retirar S/. 300 y el capital seguirá siendo S/. 10 000 los que generarán, al vencimiento del segundo mes, una nueva renta de S/. 300 y así sucesivamente. Considerando que el banco tiene una duración

indefinida y que el capital original permanece constante, el interés percibido mensualmente se convertirá en una renta perpetua vencida.

n (meses)	Capital inicial P	Monto S	Renta R	Capital final
1	10 000	$10\,000 \times 1,03 = 10300$	(300)	10 000
2	10 000	$10\,000 \times 1,03 = 10300$	(300)	10 000
3	10 000	$10\,000 \times 1,03 = 10300$	(300)	10 000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

2.1 Renta perpetua vencida

Puede inducirse entonces que una renta uniforme perpetua vencida es el flujo de efectivo producido en un período de tiempo por una tasa de interés sobre un importe P, donde el número de períodos capitalizados es una cantidad infinitamente grande y no determinada. Debe entenderse, para el presente caso, que al final de cada período el flujo generado por P no es reinvertido en la misma perpetuidad.

$$R = Pi \quad (80)$$

La tasa i , constituye el FRC en una perpetuidad vencida cuando n tiende a $+\infty$. Reemplazando (80) por las siglas conocidas tenemos:

$$R = P \cdot \text{FRC}_{i; +\infty} \quad (80')$$

2.2 Renta perpetua anticipada

Para el cálculo de la renta uniforme perpetua anticipada, reemplazamos en (80) la renta vencida R por su equivalente anticipada Ra $(1 + i)$:

$$Ra (1 + i) = Pi$$

$$Ra = P \left[\frac{i}{1 + i} \right]$$

Por (55) sabemos que $d = \frac{i}{1+i}$ entonces

$$\boxed{Ra = Pd \quad (81)}$$

Ejemplo 1.- Acogiéndose al programa de incentivos por renuncia voluntaria, un trabajador cobró su indemnización ascendente a S/. 10 000. Con el objeto de percibir una renta quincenal indefinidamente, ha decidido colocar el importe de su indemnización en una institución financiera que paga una TEM del 3%. Asumiendo que la tasa no varía ¿cuál será el importe de la renta perpetua quincenal: a) vencida, b) adelantada?

Solución

Cálculo de la TEQ: $1,03^{1/2} - 1 = 0,014889157$

Cálculo de d:
$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,014889157}{1+0,014889157} = 0,01467072232$$

a) Renta perpetua vencida

$$\begin{aligned} R &= Pi \\ R &= 10\,000 \times 0,014889157 = 148,89 \end{aligned}$$

b) Renta perpetua anticipada

$$\begin{aligned} Ra &= Pd \\ R &= 10\,000 \times 0,01467072232 = 146,71 \end{aligned}$$

3. Valor presente de una perpetuidad uniforme vencida y anticipada

3.1 Valor presente de una perpetuidad vencida

Para calcular el valor presente de una perpetuidad constituida por rentas uniformes vencidas, despejamos P de la fórmula (80) $R = Pi$

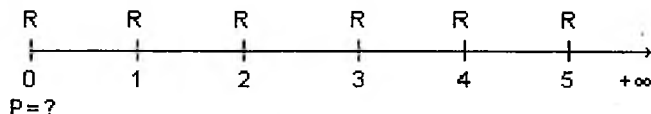
$$P = R \left[\frac{1}{i} \right] \quad (82)$$

La expresión $\frac{1}{i}$ constituye el FAS en una perpetuidad vencida cuando n tiende a $+\infty$. Reemplazando (82) por las siglas conocidas tenemos:

$$P = R \cdot \text{FAS}_{i; +\infty} \quad (82')$$

3.2 Valor presente de una perpetuidad anticipada

El valor presente de una perpetuidad constituida por rentas uniformes anticipadas, es equivalente al valor presente de la perpetuidad vencida, a la que hay que adicionarle la renta producida en el momento 0.



Por (80) sabemos que

$$P_i = R$$

En el momento 0 podemos netear el stock

$$(P - R)_i = R$$

Desarrollando la ecuación anterior

$$(P - R)_i = R$$

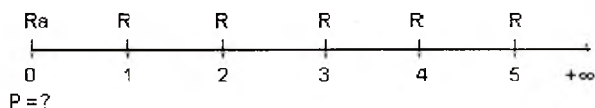
$$P - R = \frac{R}{i}$$

$$P = R + \frac{R}{i} \quad (83)$$

El valor presente de una perpetuidad anticipada es igual a la renta ubicada en el momento 0 más el valor presente de la perpetuidad vencida.

3.3 Valor presente de una perpetuidad anticipada cuya renta inicial es diferente a las demás rentas

En el caso que la renta R_a en el momento 0 sea diferente a las demás rentas R de la perpetuidad vencida, el valor presente será:



$$P = R_a + \frac{R}{i} \quad (84)$$

Ejemplo 2.- Acogiéndose a un programa de incentivos por retiro voluntario un trabajador ha reunido un determinado capital, el mismo que lo piensa colocar en una institución financiera que paga una TEM del 3%. ¿Qué importe debe colocar para disponer cada fin de mes una renta de S/. 300 en forma indefinida?

Solución

$$P = ?$$

$$R = 300$$

$$i = 0,03$$

$$P = R \left[\frac{1}{i} \right]$$

$$P = 300 \left[\frac{1}{0,03} \right]$$

$$P = 10\,000$$

Ejemplo 3.- La Garita de Peaje a Pucusana recauda, en promedio, el importe de \$ 10 000 mensual. ¿Cuál es el valor presente de esas rentas tomando en consideración una TEM del 0,5%?

Solución

$$P = ?$$

$$R = 10\,000$$

$$i = 0,005$$

$$P = R \left[\frac{1}{i} \right]$$

$$P = 10\,000 \left[\frac{1}{0,005} \right]$$

$$P = 2\,000\,000$$

Ejemplo 4.- Una Fundación ofrece una donación a perpetuidad a una universidad estipulando que el primer importe de \$ 10 000 se aplique a la adquisición de libros y los siguientes importes de \$ 5 000 a ser entregados a inicios de cada año en forma indefinida, sean para el mantenimiento de la institución. Calcule el valor presente de esa donación utilizando una TEA del 10%.

Solución

$$\begin{aligned} P &= ? & P &= Ra + \frac{R}{i} \\ Ra &= 10\,000 & P &= 10\,000 + \frac{5\,000}{0,1} \\ R &= 5\,000 & P &= 60\,000 \\ i &= 0,1 \end{aligned}$$

Si la Fundación, de los \$ 60 000 que debe disponer, entrega en el acto \$ 10 000 a la universidad y los \$ 50 000 restantes los coloca en una institución donde puede rentabilizar 10% anual, cumplirá a perpetuidad con el compromiso adquirido.

4. Valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida y anticipada

El desarrollo de estas fórmulas se efectúa relacionando las fórmulas del valor presente de una renta diferida y del valor presente de una renta anticipada.

4.1 Valor presente de una perpetuidad diferida vencida

Relacionando las fórmulas (76) y (82) tenemos:

$$P = R \left[\frac{1}{(1+i)^k} \right] \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \quad (76) \quad \text{Valor presente de una anualidad diferida vencida}$$

$$P = R \left[\frac{1}{i} \right] \quad (82) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad vencida}$$

Reemplazando en (76) el FAS de la renta diferida vencida, por el FAS de la renta perpetua vencida $[1/i]$ de la fórmula (82) encontramos el valor presente de una perpetuidad diferida k periodos:

$$P = R \left[\frac{1}{(1+i)^k} \right] \left[\frac{1}{i} \right] \quad (85)$$

4.2 Valor presente de una perpetuidad diferida anticipada

Relacionando las fórmulas (77) y (82) tenemos:

$$P = Ra (1+i)^{1-k} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \quad (77) \quad \text{Valor presente de una anualidad diferida anticipada}$$

$$P = R \left[\frac{1}{i} \right] \quad (82) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad vencida}$$

Reemplazando en (77) el FAS (término entre corchetes), por el FAS de la renta perpetua vencida $[1/i]$ de la fórmula (82), encontramos el valor presente de una perpetuidad diferida anticipada:

$$P = Ra (1+i)^{1-k} \left[\frac{1}{i} \right] \quad (86)$$

Ejemplo 5.- El dueño de una mina con reservas de explotación probadas para un plazo mayor a 100 años tiene una utilidad neta promedio anual de \$ 18 000. Calcule el valor presente de la mina con el objeto de venderla, conociendo que los próximos dos años la mina no operará por renovación de sus equipos. El dueño percibe por sus inversiones una tasa anual del 15%.

Solución

$$P = ?$$

$$R = 18\,000$$

$$k = 2$$

$$i = 0,15$$

$$P = R \left[\frac{1}{(1+i)^k} \right] \left[\frac{1}{i} \right]$$

$$P = 18\,000 \left[\frac{1}{(1+0,15)^2} \right] \left[\frac{1}{0,15} \right]$$

$$P = 90\,737,24$$

Ejemplo 6.- Una Sociedad Benéfica ha podido obtener una donación de \$ 5 000 en forma indefinida, los mismos que se percibirán a inicios de cada año pero después de haber transcurrido 3 años contados a partir de la fecha. ¿Cuál es el valor presente de esa donación considerando una TEA del 8%?

Solución

$$\begin{aligned} P &= ? \\ Ra &= 5\,000 \\ k &= 3 \\ i &= 0,08 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P &= Ra (1 + i)^{l-k} \left[\frac{1}{i} \right] \\ P &= 5\,000 (1 + 0,08)^{l-3} \left[\frac{1}{0,08} \right] \\ P &= 53\,583,68 \end{aligned}$$

5. Capitalización

La palabra *capitalización* es utilizada como sinónimo de valor presente de una renta perpetua.

Ejemplo 7.- La compañía La Pipona tiene terrenos alquilados en forma indefinida, que le aseguran rentas de \$ 500 a inicios de cada mes. ¿Cuál es el valor capitalizado de esos activos considerando una TEM del 1%?

Solución

$$\begin{aligned} P &= ? \\ R &= 2\,000 \\ i &= 0,01 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P &= R + \frac{R}{i} \\ P &= 500 + \frac{500}{0,01} \\ P &= 50\,500 \end{aligned}$$

Ante el rendimiento del 1% efectivo mensual, es equivalente disponer de un capital de \$ 50 500 o ser propietario de los terrenos de La Pipona.

Ejemplo 8.- Jorge Toval y sus socios han decidido vender su S.R.L. Por tal motivo se encuentran estimando cuál será el importe a solicitar como precio

base. Del análisis de los estados financieros comprueban que la empresa reportaba una utilidad neta trimestral del orden de \$ 5 000. Calcule el precio base a discutir por los socios, si la rentabilidad promedio de las inversiones similares es del 40% anual.

Solución

$$P = ?$$

$$R = 5\,000$$

$$i = 0,087757$$

$$TET = 1,4^{(1/4)} - 1 = 0,087757306$$

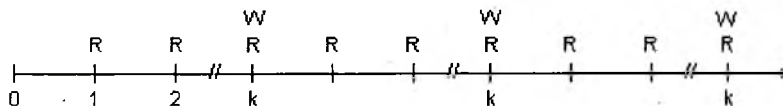
$$P = R \left(\frac{1}{i} \right)$$

$$P = 5\,000 \left(\frac{1}{0,087757306} \right)$$

$$P = 56\,975$$

6. Valor presente de una perpetuidad a pagar al final de cada cierto número de períodos de capitalización

Existen diversas actividades de producción de bienes o servicios cuyos activos deben renovarse o sustituirse periódicamente cada cierto número de años, originando desembolsos que constituyen una renta perpetua, tal como sucede en las empresas de transportes, en el mantenimiento de carreteras, puentes, etc. Los reemplazos periódicos que se suceden indefinidamente se pueden graficar:



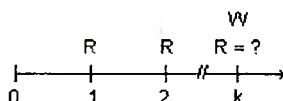
donde:

k = número de años o períodos que median entre dos pagos sucesivos de una renta perpetua.

W = monto de los k pagos de importe R , efectuados al final de cada período de capitalización.

Las rentas R deben constituir un fondo W conocido de antemano, el mismo que servirá para amortizar los gastos que ocasione el mantenimiento o reemplazo del activo cada k años, activo que se desea conservar por un tiempo indefinido.

Si se observa el primer intervalo de pago, se aprecia que el problema corresponde al cálculo de la renta vencida que permitirá amortizar el monto requerido W , en una anualidad que se repite indefinidamente.



Si en (64) $R = S \cdot FDFA_{i,n}$ sustituimos S por W y n por k tenemos:

$$R = W \cdot FDFA_{i,k}$$

Reemplazando R por su equivalente en (82) $P = R \left(\frac{1}{i} \right)$

$$P = W \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right] \frac{1}{i}$$

$$P = \frac{W}{i} \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right] \quad (87)$$

Reemplazando (87) por sus siglas correspondientes tenemos:

$$P = \frac{W}{i} FDFA_{i,k} \quad (87')$$

Ejemplo 9.- El puente colgante que une Chosica con San Fernando ha tenido un costo original de \$ 20 000 y se estima que deberá ser reemplazado cada 15 años a un costo de \$ 15 000. Calcule el importe que se deberá depositar hoy,

para formar un monto que asegure a perpetuidad los reemplazos futuros del puente, si dicho capital percibe una TEA del 10%.

Solución

$P = ?$

$W = 15\ 000$

$i = 0,1$

$k = 15$

$$P = \frac{W}{i} F DFA_{i;k}$$

$$P = \frac{15\ 000}{0,1} F DFA_{0,1;15}$$

$$P = 4\ 721,07$$

Un capital de \$ 4 721,07 colocado hoy a una TEA del 10% generará un monto dentro de 15 años de \$ 19 721,07 el cual asegurará a perpetuidad el importe requerido de \$ 15 000 para efectuar los reemplazos futuros del puente, tal como se comprueba a continuación:

Monto al finalizar el 15vo año $4\ 721,07 \times 1,1^{15}$	19 721,07
Retiro para reemplazar el puente	15 000,00
Saldo que generará el nuevo monto de \$15 000	4 721,07

7. Costo capitalizado

El *costo capitalizado* de un activo está constituido por su costo inicial más el valor presente de las infinitas renovaciones para poseerlo permanentemente, como sucede en el caso de bienes que deben prestar servicios en forma indefinida como por ejemplo: caminos, puentes, muelles, pavimentos, etc. La diferencia con la capitalización es que ésta excluye el costo inicial del activo. Las renovaciones de activos se producen necesariamente al final de su vida útil, dependiendo su costo de las condiciones del mercado pudiendo ser diferente al costo original del bien.

Simbología

- C = costo capitalizado del activo
- F = costo original o inicial del activo
- W = costo de reemplazo del activo
- k = número de años de vida útil del activo
- i = tasa de interés periódica

De acuerdo al concepto de costo capitalizado: costo original + valor presente de las infinitas renovaciones tenemos que:

$$C = F + P$$

Dado que P constituye el valor presente de una perpetuidad pagadera k períodos, desarrollada en (87) tenemos:

$$C = F + \frac{W}{i} FDFA_{i;k} \quad (88)$$

Ejemplo 10.- La canalización de las riberas del río Rímac en la zona del centro de Lima tuvo un costo de \$ 40 000. Los técnicos estimaron que cada 15 años debía limpiarse y reforzarse los muros de contención a un costo aproximado de \$ 15 000. Calcule el costo capitalizado asumiendo una TEA del 8%.

Solución

$$C = ?$$

$$F = 40\,000$$

$$k = 15$$

$$i = 0,08$$

$$W = 15\,000$$

$$C = F + \frac{W}{i} FDFA_{i;k}$$

$$C = 40\,000 + \frac{15\,000}{0,08} FDFA_{0,08;15}$$

$$C = 46\,905,54$$

Los \$ 46 905,54 permitirán cubrir el costo de \$ 40 000 para canalizar el río Rímac, el saldo de \$ 6 905,54 al cabo de 15 años se habrá convertido en \$ 21 905,54 a la TEA del 8%, lo que permitirá cubrir los \$ 15 000 para limpiar y reforzar los muros de contención dejando un remanente de \$ 6 905,54 que permitirá generar indefinidamente un nuevo monto para la limpieza y refuerzos posteriores.

Costo original	40 000,00
Saldo que generará el monto para limpieza y refuerzos	6 905,54
Costo capitalizado	46 905,54
Monto generado cada 15 años por el saldo \$ 6 905,54 x 1,08 ¹⁵	21 905,54
Importe requerido cada 15 años para limpieza y refuerzos	15 000,00
Saldo que generará cada 15 años la perpetuidad de \$ 21 905,54	6 905,54

7.1 Costo capitalizado cuando F es igual a W

Si el costo inicial del activo F es igual al costo de reemplazo del activo W, entonces la ecuación (88) puede plantearse del siguiente modo:

$$C = F + \frac{W}{i} FDFA_{i;k}$$

si $F = W$

$$C = F + \frac{F}{i} \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right]$$

$$C = F \left[1 + \frac{1}{i} \left(\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right) \right]$$

$$C = F \left[\frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^k - 1} + \frac{1}{(1+i)^k - 1} \right]$$

$$C = F \left[\frac{(1+i)^k}{(1+i)^k - 1} \right]$$

$$C = F \left[\frac{1}{1 - (1+i)^{-k}} \right]$$

multiplicando por i/i

$$C = \frac{F}{i} \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-k}} \right] \quad (89)$$

Reemplazando (89) por las siglas conocidas tenemos:

$$C = \frac{F}{i} FRC_{i;k} \quad (89')$$

Ejemplo 11.- Calcule el costo capitalizado de una camioneta Kombi cuyo precio de adquisición es de \$ 15 000, su vida útil de 5 años y sus reemplazamientos tienen el mismo costo que el original. Considere una TEM del 7%.

Solución

$$C = ?$$

$$F = 15\,000$$

$$k = 15$$

$$i = 0,07$$

$$C = \frac{F}{i} FRC_{i;k}$$

$$C = \frac{15\,000}{0,07} FRC_{0,07;5}$$

$$C = 52\,262,29$$

Ejemplo 12.- La carpintería metálica de fierro a instalar a un edificio construido frente al mar, tiene un costo de \$ 20 000 y una vida estimada en 10 años. Alternativamente se evalúa la posibilidad de colocar una carpintería de aluminio con un costo de \$ 30 000 y una vida estimada de 20 años. ¿Qué alternativa en el largo plazo resultaría mas conveniente, asumiendo una TEA del 15%?

Solución

Carpintería de fierro

$$C = ?$$

$$F = 20\,000$$

$$i = 0,15$$

$$k = 10$$

$$C = \frac{F}{i} FRC_{i;k}$$

$$C = \frac{20\,000}{0,15} FRC_{0,15;10}$$

$$C = 26\,567$$

Carpintería de aluminio

$$C = ?$$

$$F = 30\,000$$

$$i = 0,15$$

$$k = 20$$

$$C = \frac{30\,000}{0,15} FRC_{0,15 - 20}$$

$$C = 31\,952$$

La carpintería de fierro es más conveniente que la de aluminio, a pesar de que aparentemente el costo del aluminio se incrementa en 50%, mientras que su vida útil se incrementa en 100%.

8. Costos equivalentes

Por medio de ecuaciones de costos capitalizados equivalentes pueden darse respuestas a las siguientes interrogantes: ¿cuánto se puede pagar por un activo para que el desembolso en un período sumamente largo sea igual a otro con el mismo fin pero con diferencias en costo y vida útil?, ¿se justifican los gastos en reparaciones para prolongar la vida de un activo? Las ecuaciones de costos capitalizados equivalentes se plantean del siguiente modo:

Activo alternativo

Activo principal

C = costo capitalizado

C = costo capitalizado

F' = costo original y de reemplazo

F = costo original y de reemplazo

i = tasa de interés

i = tasa de interés

k = años de vida útil del activo

t = años de vida útil del activo

$$\frac{F'}{i} FRC_{i;k} = \frac{F}{i} FRC_{i;k}$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por $i \times \frac{1}{FRC_{i;k}}$

$$F' = \frac{F}{i} FRC_{i;t} \times i \times \frac{1}{FRC_{i;k}}$$

$$F' = F \times FRC_{i;t} \times \frac{1}{FRC_{i;k}}$$

$$F' = F \times FRC_{i;t} \times FAS_{i;k} \quad (90)$$

La fórmula (90) corresponde al costo de un activo F a ser reemplazado cada t años, equivalente al costo de un activo F' a ser reemplazado cada k años, a una tasa i.

Ejemplo 13.- En el problema (12), tomando como referencia el costo de la carpintería de fierro ¿hasta qué importe se podría pagar para colocar la carpintería de aluminio?

Solución

Activo alternativo	Activo principal
--------------------	------------------

F' = ?	F = \$20 000
--------	--------------

i = 15%	i = 15%
---------	---------

k = 20 años	t = 10 años
-------------	-------------

$$F' = 20\,000 \times FRC_{0,15;10} \times FAS_{0,15;20}$$

$$F' = 24\,944$$

Los contratistas, si desean colocar la carpintería de aluminio, podrían ofertar hasta \$ 24 944, precio que en el largo plazo es tan económico como la carpintería de fierro. Esto se puede verificar hallando el costo capitalizado del aluminio y comparándolo contra el costo de la carpintería de fierro.

$$C = \frac{F}{i} FRC_{i; k}$$

$$C = \frac{24\,943,69}{0,15} \times FRC_{0,15; 20} = 26\,567$$

Se podrá observar que el costo capitalizado de \$ 26 567 del aluminio, es igual al costo capitalizado del fierro hallado en el ejemplo (10).

9. Listado de fórmulas

$$R = P i \quad (80) \text{ Renta perpetua vencida}$$

$$R = P FRC_{i; \infty} \quad (80') \text{ Renta perpetua vencida}$$

$$Ra = P d \quad (81) \quad \text{Renta perpetua anticipada}$$

$$P = R \left[\frac{1}{i} \right] \quad (82) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad vencida}$$

$$P = R \cdot FAS_{i; \infty} \quad (82') \quad \text{Valor presente de una perpetuidad vencida}$$

$$P = R + \frac{R}{i} \quad (83) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad anticipada}$$

$$P = Ra + \frac{R}{i} \quad (84) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad anticipada cuya renta inicial es diferente a las demás rentas}$$

$$P = R \left[\frac{1}{(1 + i)^k} \right] \left[\frac{1}{i} \right] \quad (85) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad diferida vencida}$$

$$P = Ra (1 + i)^{1-k} \left[\frac{1}{i} \right] \quad (86) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad diferida anticipada}$$

$$P = \frac{W}{i} \left[\frac{i}{(1 + i)^k - 1} \right] \quad (87) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad a pagar al final de cada cierto número de períodos de capitalización}$$

$$P = \frac{W}{i} FDFA_{i; k} \quad (87') \quad \text{Valor presente de una perpetuidad a pagar al final de cada cierto número de períodos de capitalización}$$

$$C = F + \frac{W}{i} FDFA_{i; k} \quad (88) \quad \text{Costo capitalizado}$$

$$C = \frac{F}{i} \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-k}} \right] \quad (89) \quad \text{Costo capitalizado cuando } F = W$$

$$C = \frac{F}{i} FRC_{i; k} \quad (89') \quad \text{Costo capitalizado cuando } F = W$$

La fórmula (90) corresponde al costo de un activo F a ser reemplazado cada t años, equivalente al costo de un activo F' a ser reemplazado cada k años, a una tasa i.

Ejemplo 13.- En el problema (12), tomando como referencia el costo de la carpintería de fierro ¿hasta qué importe se podría pagar para colocar la carpintería de aluminio?

Solución

Activo alternativo	Activo principal
--------------------	------------------

F' = ?	F = \$20 000
--------	--------------

i = 15%	i = 15%
---------	---------

k = 20 años	t = 10 años
-------------	-------------

$$F' = 20\,000 \times FRC_{0,15;10} \times FAS_{0,15;20}$$

$$F' = 24\,944$$

Los contratistas, si desean colocar la carpintería de aluminio, podrían ofertar hasta \$ 24 944, precio que en el largo plazo es tan económico como la carpintería de fierro. Esto se puede verificar hallando el costo capitalizado del aluminio y comparándolo contra el costo de la carpintería de fierro.

$$C = \frac{F}{i} FRC_{i; k}$$

$$C = \frac{24\,943,69}{0,15} \times FRC_{0,15; 20} = 26\,567$$

Se podrá observar que el costo capitalizado de \$ 26 567 del aluminio, es igual al costo capitalizado del fierro hallado en el ejemplo (10).

9. Listado de fórmulas

$$R = P i \quad (80) \quad \text{Renta perpetua vencida}$$

$$R = P FRC_{i; \infty} \quad (80') \quad \text{Renta perpetua vencida}$$

$$Ra = P d \quad (81) \quad \text{Renta perpetua anticipada}$$

$$P = R \left[\frac{1}{i} \right] \quad (82) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad vencida}$$

$$P = R \cdot FAS_{i;\infty} \quad (82') \quad \text{Valor presente de una perpetuidad vencida}$$

$$P = R + \frac{R}{i} \quad (83) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad anticipada}$$

$$P = Ra + \frac{R}{i} \quad (84) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad anticipada cuya renta inicial es diferente a las demás rentas}$$

$$P = R \left[\frac{1}{(1+i)^k} \right] \left[\frac{1}{i} \right] \quad (85) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad diferida vencida}$$

$$P = Ra (1+i)^{1-k} \left[\frac{1}{i} \right] \quad (86) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad diferida anticipada}$$

$$P = \frac{W}{i} \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right] \quad (87) \quad \text{Valor presente de una perpetuidad a pagar al final de cada cierto número de períodos de capitalización}$$

$$P = \frac{W}{i} FDF_{i;k} \quad (87') \quad \text{Valor presente de una perpetuidad a pagar al final de cada cierto número de períodos de capitalización}$$

$$C = F + \frac{W}{i} FDF_{i;k} \quad (88) \quad \text{Costo capitalizado}$$

$$C = \frac{F}{i} \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-k}} \right] \quad (89) \quad \text{Costo capitalizado cuando } F = W$$

$$C = \frac{F}{i} FRC_{i;k} \quad (89') \quad \text{Costo capitalizado cuando } F = W$$

$$F' = F \times FRC_{i;t} \times FAS_{i;k} \quad (90) \quad \text{Costos equivalentes}$$

10. Problemas propuestos

1. Demuestre que $P = R + \frac{R}{i}$ es equivalente a $P = R \left[\frac{1+i}{i} \right]$ y a
- $$P = \frac{R}{d}$$

Perpetuidad vencida

- Calcule el importe de la renta perpetua mensual vencida que se puede comprar en Bonos del Gobierno con un importe de \$ 20 000 los que redimen una TEA del 10% con pago de intereses mensual. Rp. $R = \$ 159,48$.
- \$ 10 000 es el valor presente de una perpetuidad de rentas mensuales vencidas. Calcule el importe de cada renta considerando una TEA del 20%. Rp. $R = \$ 153,09$.
- Calcule la tasa de interés efectiva anual aplicada a una perpetuidad cuyas rentas mensuales vencidas son de S/. 100 y su valor presente es de S/. 8 000. Rp. TEA = 16,0754%.
- La Banca de Inversiones ofrece una rentabilidad mínima anual de 8%. Con el objeto de obtener esa rentabilidad un empresario ofrece en venta su empresa poniendo como precio base la suma de \$ 100 000. El promedio de las utilidades netas de los 5 últimos años fue de \$ 6 000. Si usted fuese inversionista, con la información proporcionada ¿hasta qué precio pagaría? ¿Por qué? Rp. Hasta \$ 75 000.

Perpetuidad anticipada

- Calcule el importe de la renta perpetua trimestral anticipada que puede adquirirse con un importe de \$ 15 000. Las instituciones financieras ofrecen una TEA del 8% por las inversiones a largo plazo. Rp. $Ra = \$ 285,85$.
- El precio actual de un pozo petrolero con una vida productiva de 100 años es de \$ 400 000. Calcule el importe de la merced conductiva mensual anticipada a pagar por la concesión del pozo a tiempo

indefinido. La TEA exigida por los dueños es del 40%. Rp. Ra = \$ 11 059,96.

8. Un carretera afirmada de una longitud de 50 Km. ha sido construida invirtiendo \$ 500 000. El costo de su mantenimiento anual puede calcularse aplicando una TEA del 2% anual. ¿A cuánto ascenderá el importe a desembolsar a principio de cada año para mantener la carretera en óptimas condiciones? Rp. Ra = 9 803,92.

Valor presente de una perpetuidad vencida

9. Calcule el valor presente de una renta perpetua trimestral vencida de \$ 1 000 aplicando una TEM del 1%. Rp. P = \$ 33 002,21.
10. Una empresa ha decidido efectuar una donación de una renta mensual perpetua vencida de \$ 500. Para estos efectos ha decidido adquirir un determinado importe en Bonos del Tesoro que redimen una TEA del 8% con pago de interés cada fin de mes. ¿Cuánto deberá invertir en bonos para que los intereses cubran el importe de la donación? Rp. P = \$ 77 711,72.
11. Aplicando una TEM del 4%, convierta una renta perpetua vencida de S/. 1 000 mensual en una renta constante vencida temporal de 20 meses. R = S/. 1 839,54.
12. Un hostel que en la fecha se piensa vender, desde hace varios años viene produciendo una renta neta anual de \$ 10 000. Se espera que esta renta se mantenga estable por muchos años más. Un grupo económico interesado en adquirirla exige a sus inversiones una tasa de rentabilidad anual del 20%. ¿Hasta cuánto podría ofrecer para adquirir el hostel? Rp. P = \$ 50 000.
13. Calcule la TEA a aplicar a un capital inicial de \$ 10 000 para que rinda un renta perpetua trimestral vencida de \$ 300. Rp. TEA = 12,55%.

Valor presente de una perpetuidad anticipada

14. Calcule el valor presente de una perpetuidad cuya renta trimestral anticipada es de \$ 300. La TEA aplicable es del 20%. Rp. P = S/. 6 732,91.
15. Aplicando una TEM del 4%, convierta una renta perpetua anticipada de S/. 1 000 mensual en una anualidad equivalente cierta temporal de 20 rentas constantes bimestrales vencidas. Rp. R = S/. 2 679,77.

Valor presente de una perpetuidad anticipada cuya renta inicial es diferente a las demás rentas

16. Las entidades receptoras de donaciones pueden emitir certificados de donación los cuales se consideran como pago a cuenta de impuestos. Para acogerse a este incentivo el Directorio de la Fundación Rocket ha decidido entregar a perpetuidad a una universidad, a inicios del primer año \$ 8 000 y de allí anualmente un importe de \$ 5 000. ¿Cuál será el valor presente de la donación considerando una TEA del 12%? Rp. $P = \$ 49\,666,67$.
17. El testamento de una persona recién fallecida establece una donación para un asilo de ancianos de \$ 3 000 inmediatamente después de acaecido su deceso, y de allí anualmente \$ 2 000 en forma indefinida. ¿Cuál es el valor actual de la donación considerando una TEA del 10%? Rp. $P = \$ 23\,000$.

Valor presente de una perpetuidad diferida vencida

18. El dueño de un pozo petrolero con reservas de explotación probadas para un plazo mayor a 100 años tiene una utilidad neta anual de \$ 84 000. Calcule el valor presente del pozo con el objeto de venderlo, conociendo que los próximos tres años no habrá explotación alguna por renovación de sus equipos. El dueño percibe por sus inversiones una TEA del 15%. Rp. $P = \$ 368\,209,09$.

Valor presente de una perpetuidad diferida anticipada

19. Un asilo de ancianos ha podido obtener una donación de \$ 8 000 en forma indefinida. La misma que se percibirá a inicios de cada año pero después de haber transcurrido 48 meses contados a partir de hoy. ¿Cuál es el valor presente de esa donación considerando una TEA del 8%? Rp. $P = \$ 79\,383,22$.

Capitalización

20. Las acciones de una compañía de Seguros cuya sede central se encuentra en Londres dan dividendos preferenciales anuales de \$ 10 por cada acción. Si estos dividendos pueden reinvertirse en nuestro medio a una

TEM del 1% ¿cuál es el valor capitalizado de cada acción? Rp. $P = \$ 78,85$.

Valor presente de una perpetuidad a pagar al final de cada cierto número de períodos de capitalización

21. El tramo de la Costa Verde que une San Miguel con Magdalena ha tenido un costo original de \$ 100 000. Se estima que el carril de la pista pegada al mar deberá ser reemplazada cada 5 años a un costo de \$ 40 000. Calcule el importe que se debió depositar en una institución que paga una TEA del 8%, en la fecha que se inauguró el tramo San Miguel-Magdalena, para asegurar a perpetuidad los reemplazos futuros de la pista que permanentemente erosiona el mar. Rp. $P = \$ 85\,228,23$.
22. Un molino de viento que se utiliza en el bombeo de agua para el regadío de tierras de sembrío ha tenido un costo de \$ 90 000. Se estima que será necesario reemplazarlo cada 10 años con un costo de \$ 40 000. Calcule el importe que habrá de depositarse en un fondo para asegurar indefinidamente los reemplazos futuros del molino. El fondo puede ganar una TEA del 8%. Rp. $P = \$ 34\,514,74$.

Costo capitalizado

23. Una carretera tiene un costo inicial de construcción de \$ 40 000 y su mantenimiento integral debe efectuarse cada 5 años en forma indefinida con un costo de \$ 8 000 por cada mantenimiento. Calcule su costo capitalizado considerando una TEA del 8%. Rp. $C = \$ 57\,045,65$.
24. Un camino de herradura tiene un costo de \$ 30 000 con una vida estimada de 10 años. Después de este intervalo de tiempo debe renovarse integralmente con un costo de \$ 15 000. Calcule su costo capitalizado considerando una TEM del 1%. Rp. $C = \$ 36\,520,64$.
25. Una entidad gubernamental que debe construir un puente para unir dos ciudades ha recibido las siguientes propuestas:
 - a) De madera, con un costo inicial de \$ 10 000 y un costo de mantenimiento cada 3 años de \$ 4 000.
 - b) De concreto, con un costo de \$ 20 000 y un mantenimiento de \$ 6 000 cada 6 años.

¿Cuál será la decisión más adecuada, considerando un costo de capital del 6% anual? Rp. a) con un $C = \$ 30\,940,65$.

Costo capitalizado cuando F es igual a W

26. Una obra de irrigación con una vida útil de 15 años tiene un costo de \$ 50 000. Después de este período de tiempo debe renovarse íntegramente con el mismo costo original. Calcule el costo capitalizado considerando una TNA del 24% capitalizable trimestralmente. Rp. \$ 51 563,10.
27. Una fundición necesita construir un almacén cuyo techo de tijerales de madera tiene un costo inicial de \$ 90 000 el cual necesita un tratamiento antipolilla cada 5 años con un gasto de \$ 30 000. Alternativamente los tijerales de fierro para el techo tienen una vida de 15 años y sus reemplazos futuros tienen el mismo costo. ¿Hasta cuánto podría pagarse por esta última alternativa considerando una TEA del 8%? Rp. C = \$ 224 781,75.
28. Las fuerzas armadas de un determinado país debe renovar periódicamente las botas de campaña de su personal de tropa. En el proceso de adquisición de las botas recibe las siguientes propuestas: a) mod. C a un precio de \$ 30 y una vida útil de 1,5 años; b) mod. D a un precio de \$ 40 y una vida útil de 2 años. ¿Cuál de las dos ofertas es más conveniente si ambos modelos pueden renovarse indefinidamente con el mismo costo? La TEA es 9%. Rp. La alternativa a) con un costo capitalizado de \$ 247,40.
29. Calcule el costo capitalizado de un camión de transporte de minerales cuyo precio de adquisición es de \$ 80 000 su vida útil es de 6 años y sus reemplazamientos tienen el mismo costo que el original. Aplique una TEA del 10%. Rp. C = \$ 183 685,90.
30. Una empresa de transportes que requiere renovar su flota recibe las siguientes propuestas: a) \$ 80 000 y una vida útil de 5 años; b) \$ 100 000 y una vida útil de 7 años. ¿Qué oferta es mas conveniente considerando una TEA del 8%? Rp. La alternativa b) con un costo capitalizado de \$ 240 090,50.

Costos equivalentes

31. Una planta de harina de pescado ubicado a orillas del mar tiene que ser pintada periódicamente con pintura anticorrosiva. El costo de aplicar una pintura químicamente tratada es de \$ 67 000. Esta pintura evita la corrosión por un plazo de 5 años. El costo de aplicar una pintura normal

es de \$ 30 000. Esta pintura evita la corrosión durante 2 años. ¿Qué alternativa en el largo plazo resultaría más conveniente asumiendo una TEA del 10%? Rp. Pintura anticorrosiva = \$ 176 744,31; Pintura normal = \$ 172 857,14.

32. En el problema anterior ¿hasta qué importe se podría ofertar para aplicar la pintura anticorrosiva químicamente tratada? Rp. Hasta \$ 65 526,46.

11. Resumen del capítulo

Una perpetuidad es una anualidad en la que el número de rentas no tiene un fin determinado, en este caso se dice que n tiende a más infinito ($n \rightarrow +\infty$). Son ejemplos de perpetuidades: los dividendos que otorgan las sociedades anónimas por sus acciones, los fondos de amortización para reemplazar activos en los proyectos de infraestructura (hidroeléctricas, irrigaciones, etc). De modo similar a las anualidades ciertas, las perpetuidades pueden ser: vencidas, anticipadas, diferidas vencidas y diferidas anticipadas.

No es posible hallar el monto de una perpetuidad ya que su número de rentas no tiene límite.

Una renta perpetua vencida es el interés producido en un período de tiempo por una cantidad P donde el número de períodos es una cantidad no determinada. Para el cálculo de una renta perpetua anticipada se reemplaza la renta anticipada por su equivalente vencida multiplicándola por $(1 + i)$.

El valor presente de una perpetuidad se obtiene despejándolo de la fórmula de la renta. El valor presente de una perpetuidad anticipada es igual a la perpetuidad vencida más la renta ubicada en el momento 0.

El término capitalización es utilizado como sinónimo de valor presente de una renta perpetua, mientras el costo capitalizado está constituido por el costo inicial de un activo más el valor presente de las infinitas renovaciones para poseerlo indefinidamente.

X

Anualidades generales

Introducción

Una anualidad cierta general es aquella en la cual los períodos de renta y la frecuencia de capitalización de la tasa de interés no coinciden, pudiéndose dar los siguientes casos:

- a) varios períodos capitalizados de tasa de interés por período de renta;
- b) varios períodos de rentas por período capitalizable de tasa de interés.

Esquema de las anualidades simples, generales e impropias

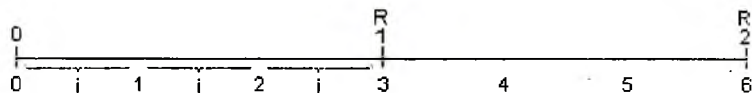
Anualidad simple



Los períodos de renta y períodos de tasa son coincidentes.

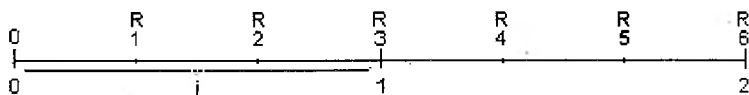
Anualidad general

Varios períodos capitalizados de tasa de interés por período de renta



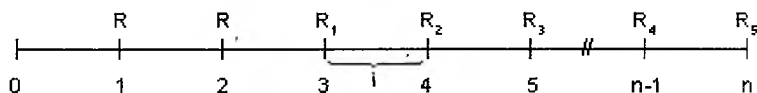
Los períodos de renta y los períodos de tasa no coinciden. En el presente caso existe un período de renta por tres períodos de tasa.

Varios períodos de renta por período de tasa de interés



Los períodos de renta y los períodos de tasa no coinciden. En el presente caso existen tres períodos de renta por un período de tasa.

Anualidad impropia o variable



En el esquema comparativo se puede observar que en las anualidades *simples* (desarrolladas en los capítulos VI, VII, VIII y IX) los períodos de renta coinciden con los períodos de tasa de interés; en las anualidades *generales* no existen coincidencias en los vencimientos de renta y tasa de interés y en las anualidades *impropias o variables* que a su vez pueden ser simples o generales, las rentas pueden darse en progresión aritmética, en progresión geométrica, de acuerdo a un patrón previamente establecido o aleatoriamente a lo largo del horizonte temporal.

Las anualidades generales se resuelven:

- Transformando la renta dada en una renta equivalente que coincida con el período de la tasa de interés.
- Transformando la tasa de interés dada en una tasa equivalente que coincida con el período de renta.

1. El FDFA como factor de distribución de rentas vencidas

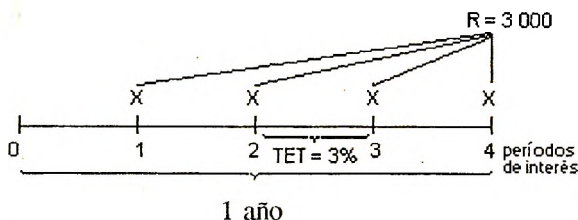
Cuando existe un período de renta por varios períodos capitalizados de tasa de interés se puede transformar la renta dada en rentas equivalentes que coincidan

con la tasa efectiva periódica, para lo cual se aplica el FDFA como un *factor de distribución* de rentas equivalentes.

Ejemplo 1.- Halle el monto de una serie de 5 depósitos de \$ 3 000 c/u realizados a fin de cada año. Utilice una TNA del 12% con capitalización trimestral.

Solución

El presente caso se trata de una anualidad general de *un* período de renta anual *cuatro* períodos trimestrales de tasa de interés, cuyo diagrama de tiempo valor del primer año es:



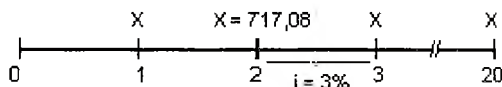
La conversión de una renta anual vencida en una renta trimestral vencida que coincida con el período de capitalización puede efectuarse aplicando el FDFA.

$$X = 3\,000 \text{ FDFA}_{0,03;4}$$

$$X = 3\,000 \times 0,2390270452$$

$$X = 717,08$$

Convertida la anualidad general en una anualidad simple, donde coincide la renta de \$/. 717,08 y la tasa, ambas trimestrales, su monto se halla utilizando el FCS durante los 20 períodos trimestrales que existen en los 5 años.



$$S = 717,08 \text{ FCS}_{0,03;20}$$

$$S = 19\,268,24$$

El cálculo directo, aplicando factores múltiples se puede efectuar con la siguiente ecuación, que resume los pasos anteriormente explicados:

$$S = 3\,000 \text{ FDFA}_{0,03;4} \text{ FCS}_{0,03;20}$$

$$S = 19\,268,24$$

Ejemplo 2.- Reemplace pagos de S/. 5 000 al final de cada trimestre por pagos equivalentes al final de cada quincena. Utilice una TEM del 4,04%.

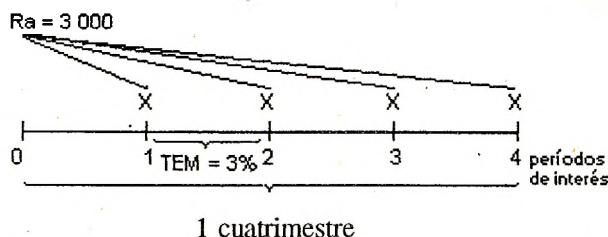
Solución

En el presente caso existe *un* período de renta trimestral por *dos* períodos de tasa de interés.

$$\begin{aligned} X &= ? & \text{TEQ} &= 1,0404^{1/2} - 1 = 0,02 \\ S &= 5\,000 & X &= 5\,000 \cdot \text{FDFA}_{0,02;6} \\ i &= 0,02 & X &= 5\,000 \times 0,1585258123 \\ n &= 6 & X &= 792,63 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.- Una persona debe amortizar al inicio de cada cuatrimestre un importe de S/. 3 000. Solicita su fraccionamiento en pagos iguales mensuales vencidos. Calcule el importe de la cuota mensual equivalente considerando una TEM del 3%.

Solución



En el presente caso, la renta mensual cuatrimestral anticipada debe ser convertida en 4 rentas equivalentes mensuales vencidas, lo que puede efectuarse distribuyéndolas con el FRC.

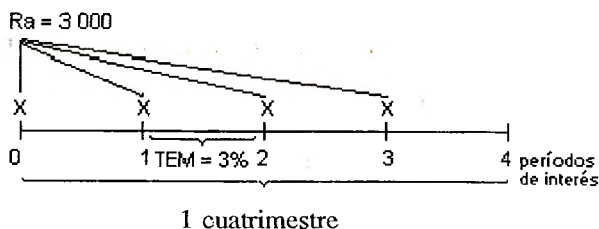
$$X = 3\,000 \text{ FRC}_{0,03;4}$$

$$X = 3\,000 \times 0,2690270452$$

$$X = 807,08$$

Ejemplo 4.- Una persona debe amortizar al inicio de cada cuatrimestre un importe de S/. 3 000. Solicita su fraccionamiento en pagos iguales mensuales anticipados. Calcule el importe de la cuota mensual equivalente considerando una TEM del 3%.

Solución



En el presente caso la renta mensual cuatrimestral anticipada debe ser convertida en 4 rentas equivalentes mensuales anticipadas, lo que puede efectuarse distribuyéndolas con la fórmula (73): imposición en función de P.

$$X(1 + i) = 3\,000 \text{ FRC}_{0,03;4}$$

$$X(1,03) = 3\,000 \times 0,2690270452$$

$$X = 783,57$$

2. El FCS como factor de agrupamiento de rentas vencidas

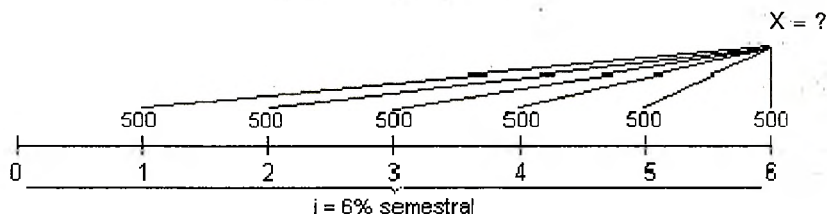
Cuando existen varios períodos de renta por un período de tasa de interés, se pueden capitalizar las rentas dadas para formar una renta equivalente que coincida con la tasa efectiva del período, para lo cual se aplica el FCS como un *factor de agrupamiento* de las rentas equivalentes.

Ejemplo 5.- Hallar el monto de una serie de 24 rentas mensuales vencidas de \$5 000 aplicando una TNA del 12% con capitalización semestral.

Solución

El presente caso se trata de una anualidad general de *seis* períodos de renta mensuales por *un* período semestral de tasa de interés, cuyo diagrama de tiempo valor del primer semestre es:

Solución



La conversión de las seis rentas mensuales vencidas en una renta semestral vencida, que coincida con el período de capitalización de la tasa, puede efectuarse aplicando el FCS con una tasa equivalente mensual.

$$\text{TEM} = 1,06^{1/6} - 1$$

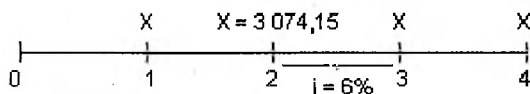
$$\text{TEM} = 0,009758794$$

$$X = 500 \text{ FCS}_{0,009758794; 6}$$

$$X = 500 \times 6,148300586$$

$$X = 3\,074,15$$

Convertida la anualidad general en una anualidad simple, donde coincide la renta de S/. 3 074,15 y la tasa efectiva, ambas semestrales, su monto se halla utilizando el FCS durante los 4 períodos semestrales que existen en los 24 meses.



$$S = 3\,074,15 \text{ FCS}_{0,06; 4}$$

$$S = 13\,448,23$$

El cálculo directo, aplicando factores múltiples, se puede efectuar con la siguiente ecuación, que resume los pasos anteriormente explicados:

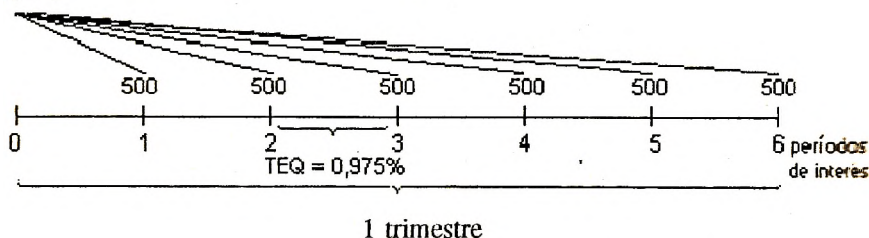
$$S = 500.FCS_{0,009758794; 6} FCS_{0,06; 4}$$

$$S = 13\,448,23$$

Ejemplo 6.- Sustituir pagos de S/. 500 cada fin de quincena, por pagos equivalentes a inicios de cada trimestre, considerando una TNA del 24% con capitalización trimestral.

Solución

$X = ?$



En el presente caso, las seis rentas quincenales vencidas deben ser convertidas en una renta equivalente trimestral anticipada, lo que puede efectuarse actualizándolas con el FAS.

a) Conversión de la TNA con capitalización trimestral a TEQ.

$$TEQ = \left(1 + \frac{0,24}{4}\right)^{1/6} - 1 = 0,009758794$$

b) Transformación de R quincenales en una X equivalente trimestral anticipada.

$$X = 500 FAS_{0,009758794; 6}$$

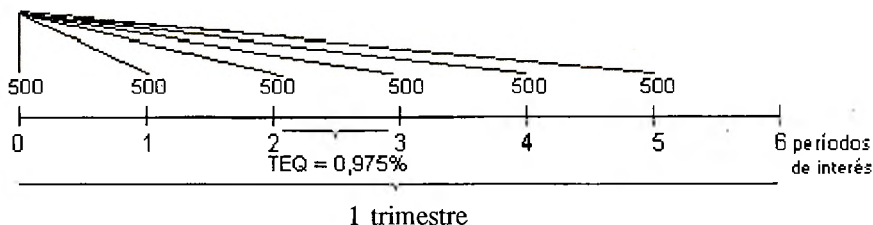
$$X = 500 \times 5,800283575$$

$$X = 2\,900,14$$

Ejemplo 7.- Sustituir pagos de S/. 500 a inicios de cada quincena, por pagos equivalentes a inicios de cada trimestre, considerando una TNA del 24% con capitalización trimestral.

Solución

$$X = ?$$



En el presente caso, las seis rentas quincenales anticipadas deben ser convertidas en una renta equivalente trimestral anticipada, lo que puede efectuarse actualizándolas con el FAS.

a) Conversión de la TNA con capitalización trimestral a TEQ.

$$TEQ = \left(1 + \frac{0,24}{4} \right)^{1/6} - 1 = 0,009758794$$

b) Transformación de R quincenales en una X equivalente trimestral anticipada.

$$X = 500(1 + 0,009758794) \text{ FAS}_{0,009758794; 6}$$

$$X = 500 \times 5,800283579$$

$$X = 2\,928,44$$

3. Monto de una anualidad general

Una vez que las rentas han sido agrupadas o distribuidas con los factores correspondientes, se convierten en anualidades simples, a las que le son aplicables las fórmulas desarrolladas para las anualidades vencidas, anticipadas y diferidas.

Ejemplo 8.- Calcule el monto de 5 rentas anuales vencidas de S/. 8 000 que se colocarán en un banco a una TNA del 24% capitalizable mensualmente.

Solución

a) Convirtiendo la renta anual en 12 rentas equivalentes mensuales y capitalizándolas 60 meses (5 años)

Renta mensual obtenida con el factor de distribución a una TEM del 2%

$$R = 8\,000 \text{ FDFA}_{0,02;12} = 8\,000 \times 0,07455959661 = 596,48$$

Capitalización de la renta mensual durante 60 períodos

$$S = 596,4768 \text{ FCS}_{0,02;60} = 596,48 \times 114,0515394 = 68\,029,09$$

- b) Convirtiendo la TEM a TEA coincidente con el período de renta

Cálculo de la TEA para hacerla coincidir con la renta anual

$$\text{TEA} = 1,02^{12} - 1 = 0,268241795$$

Capitalización de la renta anual durante 5 períodos

$$S = 8\,000 \text{ FCS}_{0,268241795;5} = 8\,000 \times 8,50363678 = 68\,029,09$$

4. Valor presente de una anualidad general

Ejemplo 9.- Calcule el valor presente de una anualidad semestral vencida de S/. 2 000 durante 4 años a una TNA del 24% capitalizable trimestralmente.

Solución

- a) Convirtiendo la renta semestral en 2 rentas equivalentes trimestrales y actualizándolas 16 trimestres (4 años)

Renta trimestral obtenida con el factor de distribución a una TET del 6%

$$R = 2\,000 \text{ FDFA}_{0,06;2} = 2\,000 \times 0,4854368932 = 970,87$$

Actualización de la renta trimestral durante 16 períodos

$$P = 977,8738 \text{ FAS}_{0,06;16} = 977,9043 \times 10,10589527 = 9\,811,55$$

- b) Convirtiendo la TNA a TES coincidente con el período de renta

Cálculo de la TES para hacerla coincidir con la renta semestral

$$\text{TES} = \left(1 + \frac{0,24}{4}\right)^2 - 1 = 0,1236$$

Actualización de la renta semestral durante 8 períodos semestrales

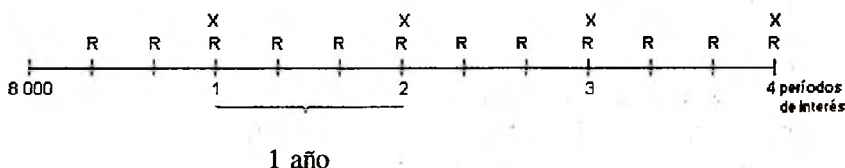
$$S = 2\,000 \text{ FAS}_{0,1236;8} = 2\,000 \times 4,905774403 = 9\,811,55$$

5. Renta de una anualidad general

La renta de una anualidad general se calcula aplicando ecuaciones de valor equivalente, factores combinados o transformado la tasa para que coincida con el período de renta.

Ejemplo 10.- Con una TEA del 15% ¿cuál será el importe de la renta cuatrimestral uniforme vencida que durante 4 años amortice una deuda de S/. 8 000?

Solución



- a) Hallando las rentas anuales en función de las rentas cuatrimestrales

$$\text{Cálculo de la TEC} = 1,15^{1/3} - 1 = 0,047689553$$

La renta anual al 15% efectivo anual que amortizará los S/. 8 000 en 4 años es:

$$X = 8\,000 \text{ FRC}_{0,15;4} \quad (1)$$

La renta anual es igual a la capitalización de 3 rentas cuatrimestrales a su TEC

$$X = R \cdot \text{FCS}_{0,047689553;3} \quad (2)$$

Igualando (2) y (1) y despejando R de la igualdad

$$R \cdot \text{FCS}_{0,047689553;3} = 8\,000 \text{ FRC}_{0,15;4}$$

$$R = 8\,000 \text{ FRC}_{0,15;4} \cdot \text{FDFA}_{0,047689553;3}$$

$$R = 8\,000 \times 0,3502653516 \times 0,3179303546$$

$$R = 890,88$$

- b) Aplicando una TEC para las 12 rentas cuatrimestrales (4 años)

$$R = 8\,000 \text{ FRC}_{0,047689553;12}$$

$$R = 8\,000 \times 0,1113599873$$

$$R = 890,88$$

6. Tiempo y tasa de una anualidad general

Convertida una anualidad general en anualidad simple, el cálculo del tiempo y tasa se resuelven de forma análoga a sus similares simples.

7. Problemas propuestos

Factor de distribución

1. ¿Qué ingreso constante de fin de mes es equivalente a S/. 5 000 de fines de cada trimestre si se percibe una TEA 15%? Rp. $X = S/. 1\,647,63$.
2. Con una TEM del 2%, ¿qué pago uniforme efectuado a fin de cada quincena es equivalente a S/. 4 000 de fin de cada trimestre? Rp. $X = S/. 650,27$.
3. La cuota mensual en la adquisición de un carro es de \$ 500, si se puede percibir una TEA del 10% y se decide efectuar depósitos vencidos cada tres días ¿cuál será el importe de cada depósito? Rp. $X = \$ 49,82$.
4. Una pareja de esposos ha decidido hoy adquirir dentro de 5 años una casa de \$ 40 000; si puede percibir por sus depósitos una TEA del 10%, ¿cuál será el importe equivalente vencido que deberá colocar: anualmente; semestralmente; trimestralmente; mensualmente o diariamente que le permita alternativamente acumular dicho fondo? Rp. Año = \$ 6 551,90; semestre = \$ 3 197,91; trimestre = \$ 1 579,90; mes = \$ 522,46; día = \$ 17,35.
5. La compañía Corso ha colocado bonos por \$ 1 000 000 los que vencerán dentro de 5 años. ¿Qué importe uniforme de fin de trimestre debe ahorrar en ese lapso de tiempo en un banco que paga una TEA del 10%, para redimir los bonos a su vencimiento? Rp. $X = \$ 39\,497,62$.
6. Con una TNA del 24% anual capitalizable trimestralmente, ¿cuál debe ser la renta constante al final de cada mes para que sea equivalente a S/. 3 000 al inicio de cada semestre? Rp. $X = S/. 534,88$.
7. Con una TNA del 24% anual capitalizable trimestralmente, ¿cuál debe ser la renta constante al inicio de cada mes para que sea equivalente a S/. 3 000 al inicio de cada semestre? Rp. $X = S/. 524,59$.

Factor de agrupamiento

8. Sustituya una deuda que debe amortizarse con cuotas uniformes de S/. 1 000 cada fin de mes, por cuotas equivalentes uniformes de fin de

trimestre. Utilice una TNA del 12% capitalizable semestralmente. Rp. $X = S/. 3\,029,18$.

9. Reemplace 12 pagos uniformes de S/. 400 c/u a realizarse cada fin de bimestre, por 3 pagos iguales anticipados a realizarse cada 8 meses. La TEM aplicable es del 2%. Rp. $X = S/. 1\,450,59$ cada pago anticipado.

Monto

10. Calcule el monto que se capitalizará con 6 rentas uniformes anuales vencidas de S/. 1 000 depositadas en un banco, las mismas que ganan una TNA del 36% con capitalización trimestral. Rp. $S = S/. 16\,791,53$.
11. Una persona se compromete a depositar a fin de cada quincena durante 6 meses, un importe de S/. 500. ¿Qué monto habrá acumulado al término de dicho plazo si percibe una TEM del 3%? Rp. $S = S/. 6\,516,56$.
12. El banco Indufin capitaliza mensualmente los intereses cuya TNA es 24% anual. ¿Qué importe se habrá acumulado al término de tres meses si se han hecho 5 depósitos de S/. 200 dentro de cada mes, en intervalos de tiempo iguales? Rp. $S = S/. 3\,084,79$.
13. ¿Cuánto se habrá capitalizado en 8 meses efectuando depósitos de fin de mes de S/. 400 con una TNA del 24% capitalizable semestralmente? Rp. $S = S/. 3\,421,90$.
14. ¿Cuánto se habrá capitalizado con imposiciones trimestrales iguales de S/. 500 durante 9 meses si se colocan en un banco que paga una TNM del 1% con capitalización bimensual? Rp. $S = S/. 1\,592,28$.
15. Calcule el importe de los intereses acumulados durante 8 meses con imposiciones uniformes bimestrales de S/. 1 000 colocadas en una financiera que paga una TNA del 18% capitalizable trimestralmente. Rp. $I = S/. 306,79$.

Valor presente

16. En la Feria del Hogar, una máquina textil está siendo ofertada con \$ 2 000 de cuota inicial y 24 cuotas mensuales de \$ 250. ¿Cuál sería el precio de contado si el crédito incluye una TEA del 20%? Rp. $P = \$ 6\,989,65$.
17. Un vendedor informal debe pagar por el saldo de un préstamo, 35 cuotas diarias de S/. 10 c/u. ¿Con qué importe podrá cancelar hoy su préstamo

si su acreedor cobra una TNA del 48 % con capitalización trimestral?
Rp. $P = S/. 342,18$.

18. Calcule el valor presente de una anualidad de 2 años, compuesta de cuotas constantes vencidas bimestrales de S/. 2 000. Aplique una TNA del 24% con capitalización trimestral. Rp. $R = S/. 18\,812,66$.

Renta

19. Un auto Tico cuyo precio de contado es \$ 8 000 se vende con una cuota inicial de \$ 3 000 y sobre el saldo se carga una TEA del 18%. ¿A cuánto ascenderá la cuota mensual si la diferencia se paga en 24 armadas iguales? Rp. $R = \$ 246,41$.
20. Una persona tiene en una libreta de ahorros un importe acumulado de S/. 3 000, de la cual piensa retirar a inicios de cada mes durante 4 años y hasta extinguirla una determinada renta constante. Calcule el importe de la renta considerando que el banco paga una tasa nominal bimestral del 2% con capitalización trimestral. Rp. $Ra = S/. 78,05$.
21. Calcule la cuota constante vencida trimestral que amortice una deuda de S/. 5 000 en año y medio. Utilice una TNT del 4,5% capitalizable semestralmente. Rp. $R = S/. 966\,36$.

Tiempo

22. Una máquina importada tiene un costo de \$ 1 000, y es vendida en \$ 2 000 bajo las siguientes condiciones: cuota inicial \$ 1 200 y el saldo de \$ 800 debe pagarse en cuotas de \$ 100 cada fin de mes con una TEA del 20%. ¿Cuántas cuotas serán necesarias para cancelar la máquina? Si los períodos de tiempo no son un número entero, proponga una cuota menos o una adicional con su respectivo importe. Rp. Son necesarias 8,599138959 cuotas o 7 cuotas de \$ 100 y la 8va de \$ 159,19.
23. ¿Con cuántos depósitos trimestrales vencidos de S/. 400 se podrá acumular un monto de S/. 3 000 asumiendo una TNA del 12% capitalizable cuatrimestralmente? Si la anualidad resulta impropia, indique el importe de los depósitos uniformes y del último depósito. Rp. Con 6,868378896 depósitos ó 5 cuotas de S/. 400 y la sexta de 813, 59.
24. Un trabajador acumuló en su Fondo de Pensiones S/. 50 000 (incluyendo el bono de reconocimiento). Acuerda con su AFP recibir como pensión una renta mensual de S/. 1 000. ¿Por cuántos meses podrá disponerla si

percibe una TEA del 18%? Si la anualidad resultase impropia indique el importe de las rentas uniformes y el importe de la última renta. Rp. Por 85,95372958 meses u 84 meses de S/. 1 000 y el 85vo mes de S/. 1 940,96.

Tasa

25. Un préstamo de \$ 1 000 se otorga en 24 cuotas quincenales vencidas de \$ 50. ¿Qué TNA se está cargando? Rp. TNA = 36,31402536%.
26. Una renta cuatrimestral vencida de S/. 700, durante 3 años acumuló un monto de S/. 7 000. ¿Qué TET se empleó en esa operación? Rp. TET = 1,952792649%.
27. Debiendo cancelar hoy el importe de S/. 5 000 se propone hacerlo mediante dos pagos iguales de S/. 2 800 cada uno los que vencerán dentro de 2 y 3 meses respectivamente. Calcule la TEA. Rp. TEA = 72,49812111%

8. Resumen del capítulo

Una anualidad general es una anualidad cierta en la cual los períodos de renta y los períodos capitalizados de la tasa de interés no coinciden, pudiéndose dar los siguientes casos: a) varios períodos capitalizados de tasa de interés por período de renta vencida y b) varios períodos de renta vencida por período de tasa de interés. En el primer caso el FDFA actúa como factor de distribución, distribuyendo la renta conocida en rentas equivalentes coincidentes con los períodos de interés; en el segundo caso el FCS actúa como factor de agrupamiento, capitalizando las rentas para que coincida con el período de interés. En ambos casos la anualidad general se convierte en una anualidad simple. Convertida la anualidad general en anualidad simple, le son aplicables las fórmulas desarrolladas para las anualidades vencidas, anticipadas, diferidas vencidas y diferidas anticipadas.

XI

Factores múltiples

Introducción

En el planteamiento de problemas aplicando anualidades se dan casos donde las rentas o flujos de caja no necesariamente empiezan en el momento 0 o siguen un patrón uniforme como los desarrollados hasta ahora. Pueden darse muchas variantes que incluyen variaciones en tasas, rentas, momentos de evaluación, etc., cuya solución depende de una combinación de factores planteados por el analista de acuerdo a las datos disponibles, los que operados adecuadamente permitan encontrar el camino más corto para resolverlo. En muchos casos por equivalencia financiera un problema puede solucionarse de distintas maneras. No hay ningún método que nos indique cuál es el procedimiento más adecuado o cuáles son las combinaciones de factores para dar respuesta directa al problema planteado, no obstante en la medida de lo posible sugerimos seguir los siguientes pasos:

- Dibujar el diagrama de flujo de caja consignando los flujos de ingresos y gastos. En algunas ocasiones puede ser necesario netear los flujos (deducir los costos de los ingresos), en cuyo caso sólo quedará un flujo: de ingreso o de gasto.
- Ubicar en el diagrama de flujo de caja todas sus variables y colocar una interrogante en la variable a encontrar.

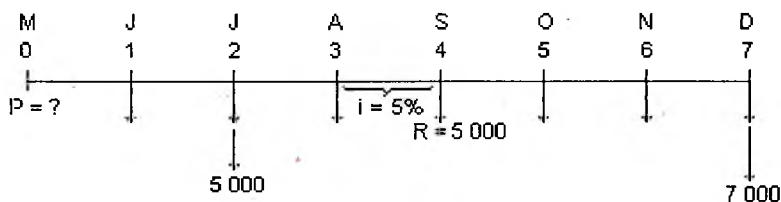
- Verificar la correspondencia entre i y n ; si éstas no están expresadas en la misma unidad de tiempo sugerimos transformar la tasa para que se corresponda con los períodos de renta.
- Si los flujos no son uniformes tratar de formar anualidades descomponiendo las rentas en la medida que sea posible.
- Establecer las ecuaciones y resolverlas operando adecuadamente su máquina.

La aplicación de factores múltiples supone el dominio del interés compuesto, tasas, anualidades y factores, temas desarrollados en los capítulos anteriores al presente. Los siguientes ejemplos se desarrollan aplicando factores múltiples.

1. Anualidades y flujos distribuidos aleatoriamente

Ejemplo 1.- El 31 de mayo la compañía Progreso S.A. estaba reprogramando su presupuesto de gastos de personal el cual ascendía a partir de esa fecha y hasta diciembre a S/. 5 000 mensuales. Sin embargo, adicionalmente, en julio se necesitará S/. 5 000 y en diciembre S/. 7 000 respectivamente, para pagos de gratificación y horas extras. Si la empresa puede percibir una TEM del 5% por sus depósitos en un banco, ¿qué capital depositado hoy (31 de mayo) le permitirá retirar mensualmente los importes de las planillas que se devengarán mensualmente, empezando el 30 de junio?

Solución



Con el objeto de trabajar con una anualidad (asumiendo 30 días por mes), la planilla de julio ha sido transformada en dos flujos de S/. 5 000 y la planilla de diciembre se ha convertido en un flujo de S/. 5 000 y uno de S/. 7 000; de este modo tenemos una anualidad que se actualiza con un FAS y dos flujos diferentes (julio y diciembre) que se actualizan separadamente cada uno con un

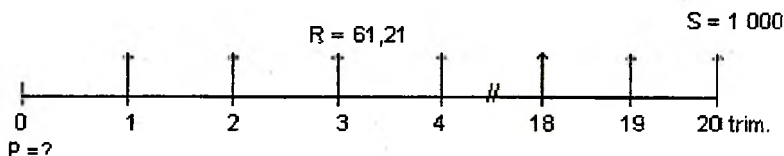
FSA. La ecuación directa para encontrar un importe en el presente, que colocado a la TEM del 5% genere las rentas deseadas, se obtiene por la equivalencia que permiten los factores múltiples FAS y FSA.

$$\begin{aligned}
 P &= 5\,000 \cdot FAS_{0,05;7} + 5\,000 \cdot FSA_{0,05;2} + 7\,000 \cdot FSA_{0,05;7} \\
 P &= 5\,000 [5,786373399] + 5\,000 [0,9070294785] + 7\,000 [0,7106813301] \\
 P &= 28\,931,87 + 4\,535,15 + 4\,974,77 \\
 P &= 38\,441,78
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.- Calcule el precio a pagar hoy por un bono con valor nominal de S/. 1 000 redimible dentro de cinco años, el cual rinde una TNA del 24% con capitalización mensual, pagadero trimestralmente. El inversionista desea ganar una TEM del 3%.

Solución

Flujo de caja del actual dueño del bono



a) Renta trimestral del bono

$$1\,000 \left[\left(1 + \frac{0,24}{12} \right)^3 - 1 \right] = 61,208$$

b) Cálculo de la tasa de rentabilidad del comprador

$$TET = 1,03^3 - 1 = 0,092727 = 9,2727\%$$

c) Cálculo del valor presente del bono aplicando la tasa de rentabilidad del comprador

$$\begin{aligned}
 P &= 61,208 \cdot FAS_{0,092727;20} + 1\,000 \cdot FSA_{0,092727;20} \\
 P &= 61,208 [8,953885165] + 1\,000 [0,16973309] \\
 P &= 548,05 + 169,73 \\
 P &= 717,78
 \end{aligned}$$

b) Utilizando el valor futuro

$$R = [2\,000 \cdot FCS_{0,04;7} + 6\,000 \cdot FSC_{0,04;5} + 7\,000 \cdot FSC_{0,04;2}] FDSA_{0,04;7}$$

$$R = [15\,796,59 + 7\,299,92 + 7\,571,20] 0,126609612$$

$$R = 3\,882,83$$

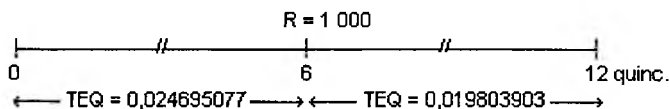
El término entre corchetes es el valor futuro de las 7 rentas de S/. 2 000 y de los flujos de S/. 6 000 y S/. 7 000 ubicados en el momento 2 y 5, respectivamente. Los flujos convertidos en stock futuro han sido convertidos nuevamente en rentas mensuales equivalentes con el FDFA.

3. Cambios de tasas en anualidades

En las evaluaciones financieras suelen utilizarse diversas tasas de acuerdo al plazo del financiamiento, al riesgo del cliente, a las operaciones anteriores realizadas, etc. pudiendo ser éstas la TAMN, TIPMN, la tasa de inflación, tasa de devaluación, etc. las cuales no permanecen fijas sino que tienden a fluctuar en el mercado de acuerdo a ciertas variables de la economía. Inclusive los créditos bancarios pactados mediante contrato están sujetos a estos cambios. Los cálculos para hallar P, S, R, n e i se efectúan aplicando factores múltiples adecuadamente con el conjunto de esas variables.

Ejemplo 4.- Si deben recibirse 12 rentas de S/. 1 000 c/u a fin de cada quincena y la TEM promedio proyectada es del 5% para cada uno de los 3 primeros meses, y del 4% para cada uno de los 3 meses restantes ¿cuál será el valor presente de esas rentas?

Solución



$$P = 1\,000 \cdot FAS_{0,019803903;6} \cdot FSA_{0,024695077;6} + 1\,000 \cdot FAS_{0,024695077;6}$$

$$P = 1\,000[4,841930411] + 1\,000[5,605139692]$$

$$P = 4\,841,93 + 5\,605,14$$

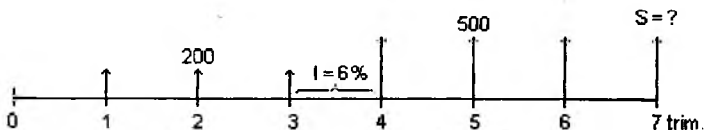
$$P = 10\,447,07$$

Los últimos 6 flujos quincenales afectos a una TEM del 4% han sido traídos con su tasa equivalente quincenal del 1,98% al final del tercer mes (sexta quincena) aplicando un FAS, convirtiéndolo en un stock futuro transitorio y de ese momento ha sido traído hacia el presente con la TEQ del 2,47%, equivalente de la TEM del 5%. Los primeros 6 flujos uniformes se les ha traído al presente con un FAS aplicándole la TEQ del 2,47%.

4. Conversión de anualidades variables a anualidades simples

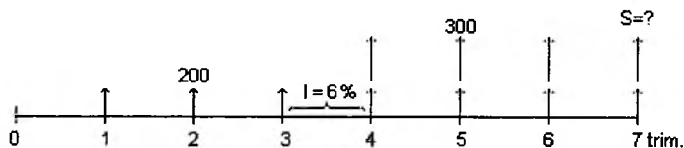
Algunas anualidades variables o impropias pueden ser convertidas a anualidades simples, descomponiendo sus rentas de alguna manera que puedan formar series uniformes, de modo que le sean aplicables factores financieros únicos o múltiples.

Ejemplo 5.- En el siguiente diagrama de flujo de caja, calcule el valor de S utilizando una TNM del 2%.



Solución

Los flujos de S/. 500 a partir del cuarto trimestre pueden descomponerse en rentas de S/. 200 y S/. 300 para formar dos anualidades independientes que puedan llevarse al futuro con el FCS a una TET del 6% ($2\% \times 3 \text{ meses} = 6\%$).

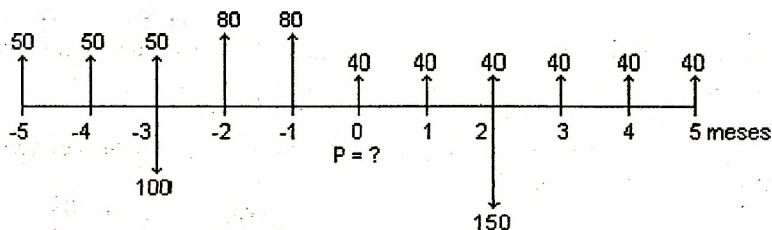


$$\begin{aligned}
 S &= 200 \cdot \text{FCS}_{0,06;7} + 300 \cdot \text{FCS}_{0,06;4} \\
 S &= 1\,678,77 + 1\,312,38 \\
 S &= 2\,991,15
 \end{aligned}$$

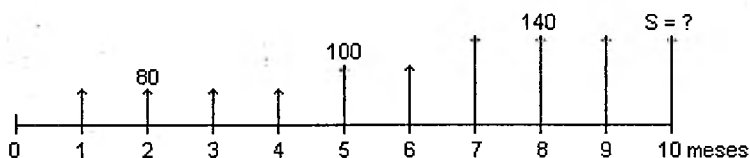
5. Problemas propuestos

Anualidades y flujos distribuidos aleatoriamente

1. Calcule el valor presente de una anualidad de 10. rentas trimestrales vencidas de las cuales las 5 primeras son de S/. 2 000, las 3 siguientes son de S/. 3 000 y las 2 últimas son de S/. 3 500. La TET es del 5%.
Rp. $P = \text{S/. } 19\,464,99$.
2. En el siguiente diagrama de flujo de caja calcule el valor presente utilizando una TEM del 5%. Rp. $P = \text{S/. } 316,05$.



3. En el siguiente diagrama de flujo de caja calcule el valor futuro utilizando una TEM del 5%. Aplique 3 ecuaciones equivalentes diferentes que produzcan el mismo resultado. Rp. $S = \text{S/. } 1\,314,67$.



4. Si la compañía Electrofast dentro de 12 meses debe reemplazar una máquina evaluada en S/. 9 000 y puede generar flujos de efectivo cada fin de mes, los mismos que depositará en un banco: S/. 500 del primer al cuarto mes y S/. 800 del quinto al noveno mes. ¿Qué importe uniforme debe depositar en los tres meses restantes para acumular dicho monto, si gana una TEM del 3%? Rp. $X = \text{S/. } 552,91$.
5. Una compañía compra al contado una máquina por \$ 8 000 de la que se espera tenga un valor de salvamento de \$ 1 000 (valor de desecho) al

final de su vida útil. La máquina requiere un mantenimiento preventivo cada tres años a un costo de \$ 2 000. ¿Cuál es el costo presente equivalente de la máquina, si tiene una vida útil de 10 años y el costo de oportunidad anual de la empresa es del 30%? Rp. $P = \$ 9\,440,75$.

6. La compañía Metales está formulando su presupuesto de ingresos mensual anual y estima los siguientes flujos de fin de mes: del primer al cuarto mes S/. 500; del quinto al octavo mes no puede proyectar los flujos ya que introducirá un nuevo producto; del noveno al doceavo mes S/. 700. Si Metales puede ahorrar esos ingresos ganando una TEM del 5% y necesita disponer al término de año de S/. 10 000, calcule el importe constante de los flujos mensuales que no puede proyectar la compañía. Rp. $X = \text{S/. } 725,12$.

7. El 31 de julio de 1 993, la compañía Carsa en un aviso publicado en el diario "El Comercio" anuncia: "Crédito inmediato, sin inicial, sin garante y hasta 18 meses para pagar". Dentro de sus ofertas incluye:

- Refrigeradora Faeda Genova 17p3, sistema No Frost, dispensador de agua. Inicial: paga hoy \$ 223 y en diciembre (de 1 993) \$ 223, y 18 cuotas mensuales de \$ 65.
- Cocina Faeda Aquarius 6: paga hoy \$ 95 y en diciembre \$ 95, y 18 cuotas mensuales de \$ 28.

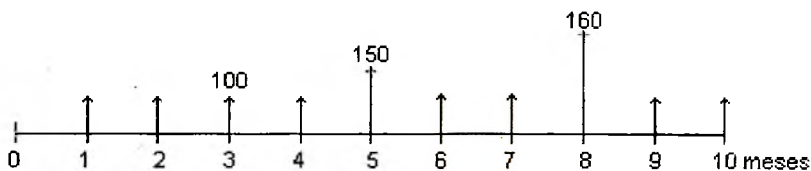
Considerando que la TAMEX en dólares norteamericanos es del 15%:

- a) ¿Cuál sería el precio de contado de ambos artículos?
- b) ¿Cuáles serían las cuotas mensuales de ambos artículos, si el cliente decide pagar la cuota inicial hoy y la diferencia en 18 cuotas mensuales iguales?
- c) Si el cliente decidiese adquirir hoy la refrigeradora con una cuota inicial de \$ 250 y las dos primeras cuotas mensuales de \$ 150 c/u, ¿a cuánto ascenderían las 16 cuotas uniformes restantes?
- d) Si el cliente propone por la cocina una cuota inicial de \$ 150 y pagos mensuales de \$ 30 ¿cuántas cuotas mensuales serán necesarias para cancelarla? Si la anualidad fuese impropia también indique el importe de la última cuota.

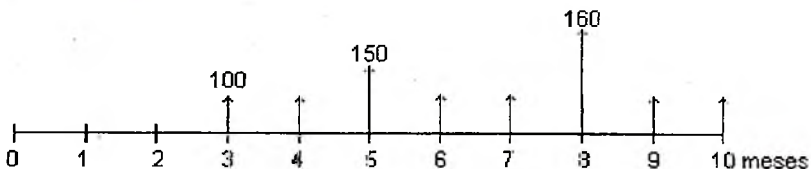
Rp. a) Refrigeradora: \$ 1 482,75; Cocina: \$ 636,66. b) Refrigeradora: \$ 78,03; Cocina: \$ 33,55. c) \$ 66,15; d) $n = 18,09674215$ de \$ 30 ó 17 cuotas de \$ 30 y la 18 de \$ 32,88.

Anualidad equivalente de flujos uniformes y únicos

8. Utilizando una TEM del 5% calcule la serie mensual uniforme equivalente del siguiente diagrama de flujo de caja, Rp. $R = S/. 110,33$.



9. En el siguiente diagrama de flujo de caja, utilizando una TEM del 5%, calcule la serie mensual uniforme equivalente. La renta equivalente debe formar una anualidad del momento 1 al momento 10. Rp. $R = S/. 86,25$.



Cambios de tasa en anualidades

10. Calcular el valor presente de los flujos de caja mensuales de los siguientes proyectos:

Mes	Proyecto A		Proyecto B		Proyecto C	
	TEM	Flujo	TEM	Flujo	TEM	Flujo
0						
1	5%	100	5%	100	5%	100
2	5%	100	5%	100	5%	100
3	5%	100	5%	100	5%	100
4	5%	100	5%	100	5%	100
5	5%	100	5%	200	5%	100
6	5%	200	5%	200	6%	100
7	5%	200	5%	200	6%	100
8	5%	200	5%	200	6%	100
9	5%	200	5%	300	6%	100
10	5%	200	5%	300	6%	100

Rp. A = S/. 1 111,40; B = S/. 1 315,60; C = S/. 763.

11. En el problema anterior lleve al futuro (momento 10) los flujos del proyecto C. Rp. $S = S/. 1\,303,16$.

Conversión de anualidades impropias a simples

12. En el siguiente diagrama de flujo de caja lleve el conjunto de flujos hacia S y P utilizando una TEA del 15%. Rp. $P = 2\,127,45$; $S = 2\,716,95$.



Factores combinados

13. Un trabajador mediante su aportación a una Administradora de Fondos de Pensiones (AFP) equivalente a \$ 100 a fin de cada mes durante 8 años, desea constituir un monto que le permita percibir al final de ese período una renta uniforme cada fin de mes durante 10 años. Calcule el importe de esa renta considerando que sus aportaciones tienen un rendimiento efectivo anual promedio del 6%. Rp. \$ 134,47.
14. Un trabajador ha decidido aportar cada fin de mes a una AFP el equivalente de \$ 300 durante los 5 años que le faltan para jubilarse, de tal modo que después de su jubilación le permita retirar mensualmente una renta igual a la de su aporte. Considerando que los capitales en la AFP tienen un rendimiento efectivo anual del 6%, ¿durante cuántos meses podrá efectuar esos retiros hasta agotar su fondo? Rp. 85,01905878 meses.
15. Los valores presentes de 2 anualidades de rentas uniformes mensuales vencidas, la primera de 24 meses a una TEM del 5% y la segunda de 36 meses a una TEM del 6%; suman S/. 18 596,11. Los montos de ambas anualidades suman S/. 117 547,69. Calcule el importe de la renta uniforme de cada anualidad. Rp. $R_1 = 500$; $R_2 = 800$.
16. Una persona deposita en un banco S/. 500 cada fin de trimestre durante un año. Por sus depósitos percibe una TEM del 1,5%. Al cabo de dos

años contados desde el inicio de la operación cancela su cuenta. Calcule el monto de sus depósitos. Rp. S/. 2 560,12.

17. Un ahorrista se propone acumular un monto de S/. 10 000 en un plazo de tres años, para lo cual se traza el siguiente plan:

Año 1: depositar S/. 100 a fines de cada quincena.

Año 2: efectuar un depósito de S/. 1 000 a fines del mes 3 y otro depósito de S/. 500 a fines del mes 12.

Año 3: depositar una renta fija cada fin de trimestre.

Calcule el importe de la renta fija del tercer año y los intereses que acumulará en los tres años. El banco paga una TEM del 1%. Rp. R = S/. 1 188,74; I = S/. 1 345,04.

6. Resumen del capítulo

Los factores múltiples son factores financieros que combinados de acuerdo con los datos disponibles de un problema, pueden plantear diferentes ecuaciones de equivalencia financiera para darle solución. La aplicación adecuada de factores múltiples supone el dominio del interés compuesto, tasas equivalentes, la aplicación de los factores de distribución y agrupamiento y las anualidades.

XII

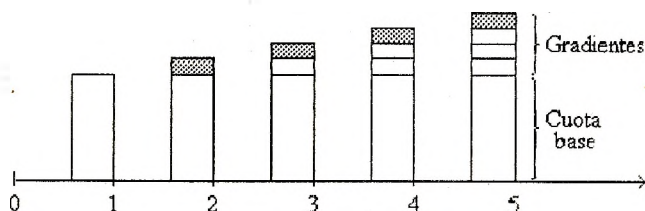
Gradientes

Introducción

En una anualidad vencida cuyas rentas consecutivas varían de acuerdo con una ley predeterminada, se denomina *gradiente* a la diferencia entre cualquier renta a partir de la segunda y la anterior.

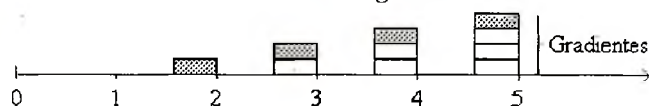
Por ejemplo, el siguiente gráfico representa una anualidad con gradiente.

Anualidad con gradiente

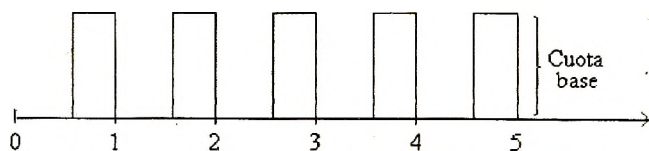


Cada renta es igual a la *cuota base* más la suma de los gradientes acumulados, siendo la cuota base un importe igual a la primera renta.

Anualidad de los gradientes



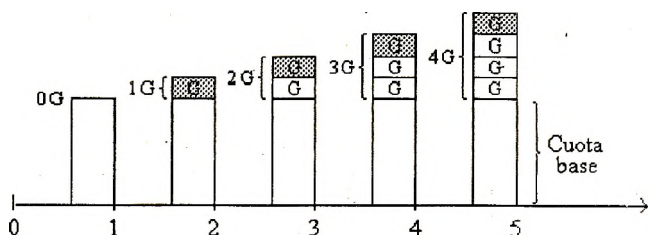
Anualidad de las cuotas bases



1. Anualidades con rentas en progresión aritmética

En una anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética, los **gradientes son uniformes**, es decir la diferencia entre una renta y la anterior es siempre la misma. El siguiente gráfico representa una anualidad con gradientes uniformes.

Anualidad con gradientes uniformes



G representa el valor del gradiente uniforme.

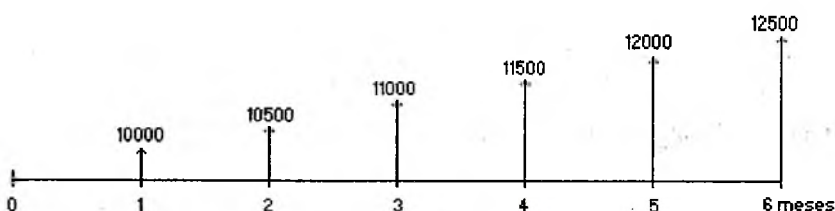
Ejemplo 1.- Dibuje el diagrama de flujo de caja para la empresa Norsur que ha introducido un nuevo producto al mercado, cuyas ventas mensuales se proyectan en S/. 10 000 y por la evolución de su posicionamiento en el mercado espera que al término del sexto mes las ventas mensuales alcancen S/. 12 500, distribuyéndose los incrementos uniformemente durante dicho período.

Solución

Cuota base 10 000

Incremento en 6 meses $12\ 500 - 10\ 000 = 2\ 500$

$$\text{Gradiente mensual} = \frac{\text{variación}}{n - 1} = \frac{2\ 500}{6 - 1} = 500$$

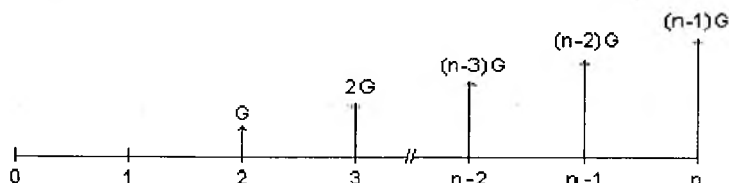


La presente anualidad con gradiente es *convencional* porque el primer gradiente aparece en la segunda renta. Si se aplica una tasa de interés efectiva periódica, por ejemplo 5% mensual, podemos desarrollar fórmulas para calcular tanto su valor presente como la anualidad equivalente, en forma similar a los desarrollados con las anualidades simples. En este punto 1, el desarrollo de las fórmulas harán referencia a anualidades con gradiente convencionales.

1.1 Valor presente de una anualidad de los gradientes

De una anualidad con gradiente convencional, obtenemos la siguiente anualidad de los gradientes:

Anualidad de los gradientes



Hallando el valor presente de esta anualidad, tenemos:

$$P = \frac{G}{(1+i)^2} + \frac{2G}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(n-2)G}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(n-1)G}{(1+i)^n} \quad (1)$$

Factorizando G

$$P = G \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(n-2)}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(n-1)}{(1+i)^n} \right] \quad (2)$$

Multiplicando ambos miembros por $(1+i)$

$$P(1+i) = G \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{(n-2)}{(1+i)^{n-2}} + \frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}} \right] \quad (3)$$

Restando (2) de (3)

$$P(1+i) - P = G \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{2-1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{(n-1) - (n-2)}{(1+i)^{n-1}} - \frac{n-1}{(1+i)^n} \right] \quad (4)$$

Efectuando las operaciones

$$P i = G \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(1-n)}{(1+i)^n} \right] \quad (5)$$

Reagrupando los términos entre corchetes para formar una P.G.

$$P i = G \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (6)$$

Dividiendo ambos miembros por i y reemplazando la P.G. por FAS tenemos:

$$P = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (91)$$

1.1.1 Factor de actualización de una anualidad de los gradientes

En la ecuación (91) se puede observar que para obtener el valor presente de una anualidad de los gradientes, multiplicamos G por una cantidad llamada Factor de Actualización de la Serie de Gradiente uniforme (FASG).

$$FASG_{i;n} = \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (92)$$

Entonces la ecuación (91) puede representarse:

$$P = G \cdot FASG_{i;n} \quad (91')$$

Debe tenerse presente que la fórmula (91) ha traído al presente sólo la anualidad de los gradientes, excluyendo la anualidad de las cuotas bases, que por sí misma constituye una anualidad simple vencida y cuyo valor presente se obtiene con (63): $P = R \cdot FAS_{i;n}$. Si sumamos (63) mas (91) tendremos el valor presente de una anualidad con gradiente uniforme.

1.2 Anualidad con rentas uniformes equivalente a una anualidad de los gradientes

Conociendo el valor presente de una anualidad de los gradientes, podemos convertirla en una anualidad con rentas uniformes. Si relacionamos (65') con (91') podemos calcular R en una anualidad de los gradientes.

$$(65') \quad R = P \cdot FRC_{i;n}$$

$$(91') \quad P = G \cdot FASG_{i;n}$$

Si en (65) reemplazamos P por su equivalente desarrollado en (91') tenemos:

$$R = [G \cdot FASG_{i;n}] FRC_{i;n}$$

cuyas expresiones matemáticas son:

$$R = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$R = \frac{G}{i} \left[1 - \frac{ni}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$R = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (93)$$

1.2.1 FRC de una anualidad de los gradientes

El término entre corchetes de (93) se denomina el Factor de Recuperación del Capital de Gradiente uniforme (FRCG):

$$FRCG_{i;n} = \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (94)$$

Entonces la ecuación (93) puede representarse:

$$R = G \cdot FRCG_{i;n} \quad (93')$$

Deducimos entonces que al multiplicar G por el FRCG obtenemos la renta uniforme de una anualidad equivalente.

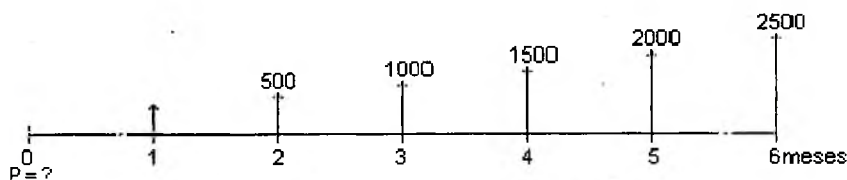
Ejemplo 2.- Con los datos del problema 1: $C = 10\,000$; $G = 500$; $n = 6$ y considerando una TEM del 5% calcule: a) el valor presente de la anualidad de los gradientes, b) transforme la anualidad de los gradientes en una serie

uniforme, c) transforme la anualidad con gradiente en una serie uniforme equivalente.

Solución

a) Valor presente de la anualidad de los gradientes

$$G = \frac{\text{incrementos}}{n - 1} = \frac{2\,500}{6 - 1} = 500 \text{ mensual}$$



$$P = \frac{G}{i} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$$

$$P = \frac{500}{0,05} \left[\frac{1,05^6 - 1}{0,05(1,05^6)} - \frac{6}{1,05^6} \right] = 5\,984$$

b) Transformación de la anualidad de los gradientes en una serie uniforme

$$R = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

$$R = 500 \left[\frac{1}{0,05} - \frac{6}{1,05^6 - 1} \right] = 1\,178,95$$

c) Transformación de la anualidad con gradiente en una serie uniforme equivalente

La renta uniforme equivalente de la anualidad con gradiente uniforme, es igual a la cuota base = 10 000, más la renta uniforme de la anualidad de los gradientes = 1 178,95.

$$R = 10\,000 + 1\,178,95 = 11\,178,95$$

Ejemplo 3.- ¿Cuál será el monto que se acumulará dentro de un año en un banco, ahorrando cada fin de mes S/. 200 si éstos se incrementan en S/. 50 cada mes y la TEM es del 3%?

Solución

Aunque es posible desarrollar una fórmula que lleve las rentas directamente hacia el futuro, hallaremos el valor presente de las cuotas bases y el valor presente de la anualidad de los gradientes. Ambos importes en el presente serán llevados al mes 12 con un FSC.

a) Valor presente de la anualidad de las cuotas bases

$$\begin{aligned} P &= R \cdot FAS_{i; n} \\ P &= 200 \cdot FAS_{0,03; 12} \\ P &= 1\,990,80 \end{aligned}$$

b) Valor presente de la anualidad de los gradientes

$$\begin{aligned} P &= G \cdot FASG_{i; n} \\ P &= 50 \cdot FASG_{0,03; 12} \\ P &= 2\,562,41 \end{aligned}$$

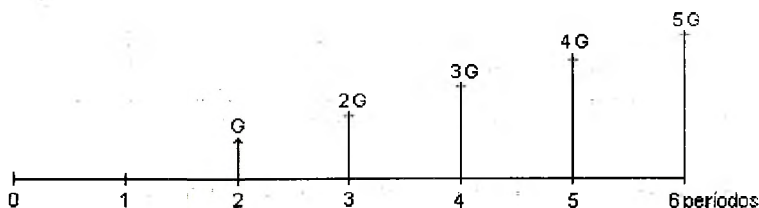
c) Cálculo del monto al final del mes 12

$$\begin{aligned} S &= [1\,990,80 + 2\,562,41] FSC_{0,03; 12} \\ S &= 6\,491,79 \end{aligned}$$

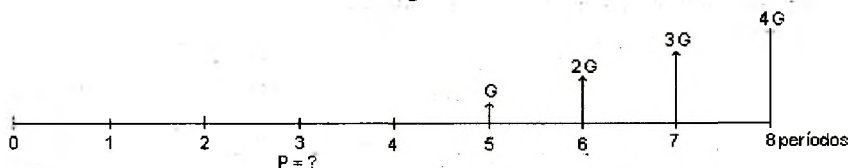
1.3 Gradientes desfasados

Una anualidad con gradientes desfasados es aquella cuyo primer gradiente aparece en un tiempo diferente del momento 2.

Anualidad de los gradientes convencionales



Anualidad de los gradientes desfasados



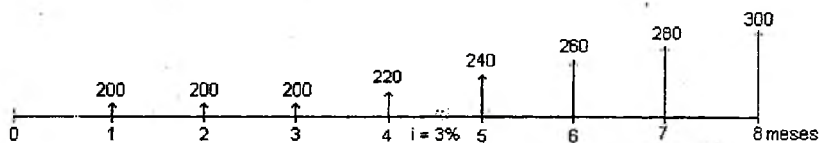
1.3.1 Valor presente de una anualidad de gradientes desfasados

Para el cálculo del valor presente de una anualidad de gradientes desfasados es necesario:

- Ubicar en el diagrama de flujo de caja el momento en que aparece el primer gradiente.
- Ubicado el momento de inicio del gradiente se sugiere reenumerar los periodos de renta, señalando el momento en que aparece el primer gradiente como el momento 2.
- Reenumerados los flujos, la anualidad de los gradientes desfasados se trata como una de gradientes convencionales, y aplicando la fórmula (91) $P = G \cdot FASG_{i;n}$ se lleva al momento reenumerado como 0,
- Se lleva dicho stock de efectivo al momento 0 del diagrama del flujo de caja original.

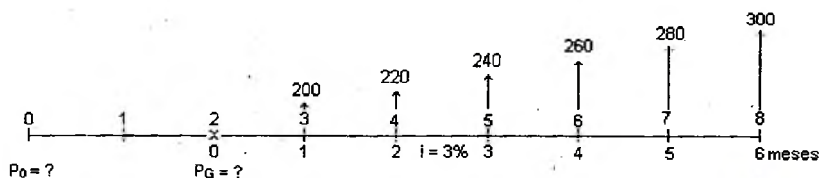
Ejemplo 4.- En el siguiente diagrama de flujo de caja utilizando una TEM del 3%, calcule: a) el valor presente de la anualidad de gradientes desfasados, b) el valor presente de la anualidad con gradiente.

Solución



a) Valor presente de la anualidad de gradientes desfasados

- Ubicación del momento de aparición del primer gradiente, el cual será el momento 2 y reenumeración de los períodos de renta, obteniendo una anualidad de gradientes convencionales.



- De acuerdo con la reenumeración de los períodos de renta, hallar el valor presente P_G de la anualidad de los gradientes.

$$P_G = 20 \cdot \text{FASG}_{0,03;6}$$

$$P_G = 20 [13,07619678]$$

$$P_G = 261,52$$

- Traer P_G hacia el momento 0 del diagrama de flujo original.

$$P_0 = 261,52 \cdot \text{FSA}_{0,03;2}$$

$$P_0 = 261,52 [0,9425959091]$$

$$P_0 = 246,51$$

b) Valor presente de la anualidad con gradientes

Para hallarlo, además del cálculo del valor presente del gradiente desfasado obtenido en a), tenemos que hallar el valor presente de la anualidad simple, cuyas rentas tienen un importe de S/. 200.

$$P = 200 \cdot \text{FAS}_{0,03;8}$$

$$P = 200 [7,019692191]$$

$$P = 1\,403,94$$

Valor presente de la anualidad:

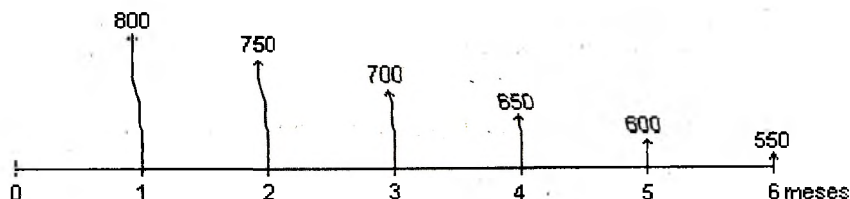
$$P = 246,51 + 1\,403,94$$

$$P = 1\,650,44$$

1.4 Gradientes negativos

En un anualidad con gradientes negativos convencionales, la primera renta es el flujo mayor de la serie, la misma que disminuye en una cantidad constante. Para hallar su valor presente o renta uniforme se aplican las mismas fórmulas obtenidas anteriormente en este capítulo, la única diferencia es que G es negativo.

Ejemplo 5.- En el siguiente diagrama de flujo de caja mensual, utilizando una TEM del 3% calcule: el valor presente de la anualidad.



Solución

- a) Valor presente de la anualidad de las cuotas bases
Cuota base = 800

$$P = 800 \text{ FAS}_{0,03;6}$$

$$P = 800 [5,417191442]$$

$$P = 4\,333,75$$

- b) Valor presente de la anualidad de los gradientes

$$P_G = G \cdot \text{FASG}_{0,03;6}$$

$$P_G = -50 [13,07619678]$$

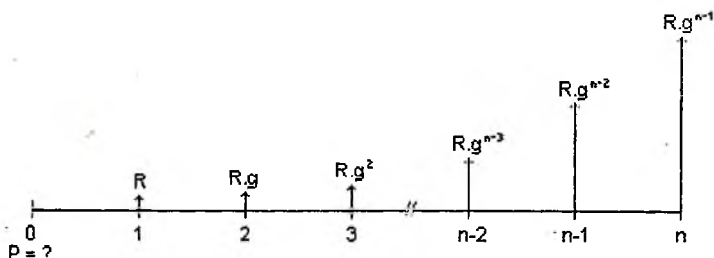
$$P_G = -653,81$$

- c) Valor presente de la anualidad con gradientes negativos

$$P = 4\,333,75 + (-653,81) = 3\,679,94$$

2. Anualidades con rentas en progresión geométrica

El crecimiento geométrico de las rentas de una anualidad se representa en el siguiente diagrama:



R = cuota base

g = razón de crecimiento geométrico

2.1 Valor presente de una anualidad cuyas rentas crecen geométricamente

Obtención de la fórmula de valor presente:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R \cdot g}{(1+i)^2} + \frac{R \cdot g^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{R \cdot g^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R \cdot g^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Observamos que P es la suma de una progresión geométrica de razón $\frac{g}{1+i}$

cuyo primer término es: $\frac{R}{1+i}$. Se resuelve aplicando la ecuación (5)

$$P = \frac{\frac{R}{1+i} \left[\left(\frac{g}{1+i} \right)^n - 1 \right]}{\left(\frac{g}{1+i} \right) - 1}$$

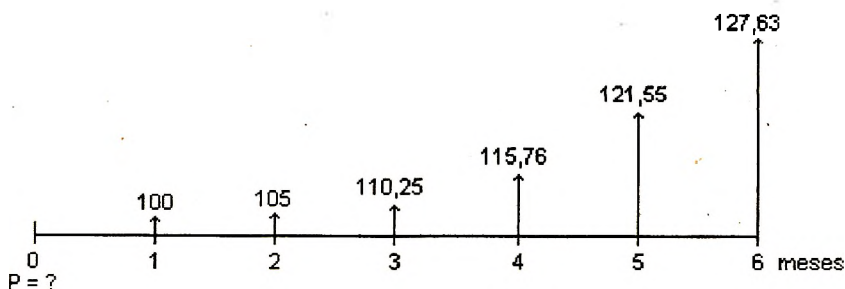
$$P = \frac{R}{1+i} \left[\frac{g^n}{(1+i)^n} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} \right] \frac{g}{1+i} - \frac{1+i}{1+i}$$

$$P = \frac{R \left[\frac{g^n - (1+i)^n}{(1+i)^n} \right]}{g - 1 - i}$$

$$P = R \left[\frac{g^n - (1+i)^n}{(1+i)^n (g - 1 - i)} \right]$$

$$P = \frac{R}{(1+i)^n} \left[\frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)} \right] \quad (95)$$

Ejemplo 6.- Aplicando una TEM del 4%, calcule el valor presente de la siguiente anualidad con rentas en progresión geométrica:



Solución

La razón de crecimiento geométrico la obtenemos dividiendo cualquier flujo entre el anterior, por ejemplo $110,25/105 = 1,05$.

$$P = ?$$

$$R = 100$$

$$i = 0,04$$

$$g = 1,05$$

$$n = 6$$

$$P = \frac{R}{(1+i)^n} \left[\frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)} \right]$$

$$P = \frac{100}{(1+0,04)^6} \left[\frac{(1,05)^6 - (1+0,04)^6}{(1,05) - (1+0,04)} \right] = 590,97$$

3. Listado de fórmulas

Anualidad de los gradientes uniformes

$$P = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (91) \quad \text{Valor presente}$$

$$P = G.FASG_{i;n} \quad (91') \quad \text{Valor presente}$$

$$\frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (92) \quad \text{FASG}$$

$$R = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (93) \quad \text{Renta uniforme}$$

$$R = G.FRCG_{i;n} \quad (93') \quad \text{Renta uniforme}$$

$$\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (94) \quad \text{FRCG}$$

Anualidades que varían en progresión geométrica

$$P = \frac{R}{(1+i)^n} \left[\frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)} \right] \quad (95) \quad \text{Valor presente}$$

4. Problemas propuestos

1. Deduzca las siguientes fórmulas en una anualidad de gradiente uniforme:
 - a) El valor futuro en el momento n , en función de G .
 - b) La renta uniforme, en función de S .
 Rp. las ecuaciones son:

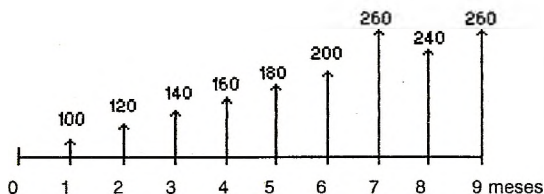
$$a) S = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \quad b) R = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

2. Un ahorrista deposita en su cuenta a fin de mes S/. 500 y a partir de esa fecha incrementará durante 11 meses cada depósito en S/. 100. ¿Cuánto habrá acumulado al finalizar el mes 12 percibiendo una TEM del 2%? Rp. S/. 13 766,49.

Valor presente y valor futuro de una anualidad que varía en progresión aritmética

3. Calcule el FASG que convierte una anualidad de gradiente uniforme convencional de 12 cuotas mensuales a una TEM del 5%, en un valor presente. Rp. 43,62405237.
4. Construya el diagrama de flujo de caja de 8 períodos mensuales vencidos cuya cuota base es de S/. 100 y crece uniformemente hasta 240. Asimismo, calcule el valor presente de la anualidad de gradiente uniforme utilizando una TEM del 5%. Rp. $P = S/. 419,40$.
5. Una empresa está formando un fondo que le permita adquirir dentro de un año una máquina automatizada, para lo cual decide depositar en un banco cada fin de mes S/. 500, importe que incrementará en S/. 100 mensualmente. Si por los depósitos percibe una TEM del 3%, ¿cuánto tendrá al finalizar el plazo comprometido? Rp. S/. 14 402,78.
6. Un préstamo de S/. 5 000 ha sido pactado para ser amortizado en 6 cuotas mensuales vencidas crecientes aritméticamente, cuya cuota base es de S/. 400 con un gradiente convencional de S/. 50 hasta la quinta cuota, ¿cuál será el importe de la sexta cuota con la cual quede totalmente cancelado el crédito que tiene un costo efectivo del 4% mensual? Rp. $X = S/. 3 532,18$.

7. Calcule el valor presente de un *cash flow* con flujos mensuales de S/. 1 000 como cuota base, e incrementos mensuales de S/. 500 durante un semestre. Utilice una TEM del 5%. Rp. $P = S/. 11\,059,69$.
8. ¿Cuál será el valor presente de una máquina cuyo costo de adquisición es S/. 4 000 y que origina gastos de mantenimiento de S/. 100 el primer mes y de allí hasta el mes 12 dichos gastos se incrementan en S/. 20 mensualmente? Aplique una TEM del 4%. Rp. $P = S/. 5\,883,46$.
9. La compañía Pipon ha considerado en su presupuesto de inversiones adquirir una nueva máquina dentro de 10 meses, cuyo costo se estima para esa fecha en S/. 10 000. Pípon puede destinar para esa adquisición un importe de S/. 500 al final del primer mes y de allí en adelante incrementarlo en forma de gradiente aritmético uniforme. Si dichos flujos los deposita en un banco percibiendo una TEM del 3%, ¿cuál será el importe del gradiente? Rp. $G = S/. 87,467$.
10. Calcule el valor presente en el siguiente diagrama de flujo de caja utilizando una TEM del 3%. Rp. $P = S/. 1\,403,37$.



11. En la siguiente tabla, calcule G y el valor futuro de los flujos de caja en el momento 6, de tal modo que el valor presente de los flujos mensuales sean equivalentes a S/. 6 000. Utilice una TEM del 4%. Rp. $G = S/. 270,179$; $S = S/. 7\,591,91$.

Mes	0	1	2	3	4	5	6
Flujo de caja	0	500	$500 + G$	$500 + 2G$	$500 + 3G$	$500 + 4G$	$500 + 5G$

12. La compañía Pisa ha invertido \$ 10 000 en un programa de productividad. El mismo le permitirá efectuar ahorros de \$ 400 a fin del primer mes, los que se incrementarán en \$ 100 mensualmente. ¿En cuánto tiempo Pisa recuperará su inversión considerando una TEM del 4%? Rp. 13,5735 meses.

13. La compañía Yape obtiene un préstamo del Banco Surnor de S/. 10 000 a una TEM del 5% para amortizarlo en 12 cuotas cada fin de mes, con el compromiso de que cada cuota se incremente en S/. 100 mensualmente. ¿Cuál será el importe de la última cuota? Rp. S/. 1 736,06.

Renta uniforme

14. Calcule el FRCG que convierte una anualidad de gradiente convencional de 12 meses en una anualidad equivalente con rentas mensuales uniformes, a una TEM del 5%. Rp. 4,921901595.
15. La compañía Traspol tiene los siguientes flujos de caja mensuales proyectados:

Mes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Flujo de caja	0	100	120	140	160	180	200	220	240	260

Utilizando una TEM del 4% calcule:

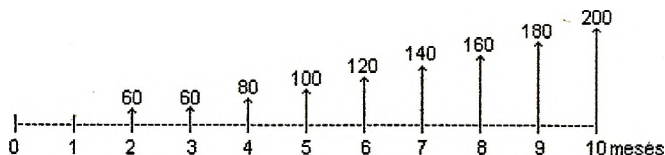
- a) La renta uniforme de los gradientes.
b) La renta uniforme de la anualidad con gradiente.
Rp. a) S/. 74,78; b) S/. 174,78.
16. Calcule el costo mensual equivalente de un proceso productivo que demanda un desembolso inicial de S/. 2 000 e irroga costos mensuales de S/. 50 que se incrementan en S/. 20 por mes, hasta el mes 10. Aplique una TEM del 5%. Rp. R = S/. 390,98.

Gradiente uniforme

17. Calcule el importe del gradiente en una anualidad creciente aritméticamente compuesta de 10 rentas trimestrales, cuya cuota base es de S/. 500, su valor presente de S/. 5 000 y percibe una TEM del 3%. Rp. G = S/. 76,36.
18. Calcule el gradiente uniforme a aplicar a un préstamo de S/. 9 643,30 reembolsable en 4 cuotas fijas de fin de trimestre, cuya primera renta es de S/. 2 000 y la TNA es del 20% capitalizable trimestralmente. Rp. G = 500.

Gradientes desfasados

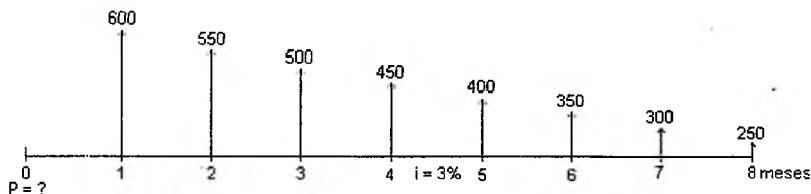
19. En el siguiente diagrama de flujo de caja, calcule la renta mensual uniforme equivalente utilizando una TEM del 5%. Rp. $R = S/. 101,86$.



20. Calcule el importe capitalizado al final del mes 12, si se han efectuado 11 depósitos de fin de mes en un banco ganando una TEM del 3%, de los cuales los 4 primeros fueron de S/. 200 y a partir del mes 5 hasta el mes 11 se incrementaron S/. 50 cada mes. Rp. $S = S/. 4 170,25$.

Gradientes negativos

21. Utilizando una TEM del 3%, calcule el valor presente del siguiente flujo de caja. Rp. $P = S/. 3 037,78$.



22. Calcule el valor presente de una anualidad compuesta de 20 rentas trimestrales que varían en progresión aritmética, cuya cuota base es 1 000, su gradiente uniforme -50 y está afectada a una TEM del 5%. Rp. $P = S/. 4 439,48$.

Anualidades cuyas rentas varían geométricamente

23. Calcule el valor presente de un préstamo otorgado para ser amortizado en 24 cuotas trimestrales vencidas a una TEM del 3%, con cuotas de S/. 500 que se irán incrementando en 5% cada una, en relación a la anterior. Rp. $P = S/. 7 209,26$.

24. Calcule la primera cuota de una anualidad creciente geométricamente cuyo valor presente es de S/. 5 000, su número de cuotas trimestrales es 20, su razón 1,04 y está afectada a una TEM del 5%. Rp. Cuota base = S/. 287,04.

5. Resumen del capítulo

Un gradiente es la diferencia entre cualquier renta a partir de la segunda y la inmediata anterior. Las anualidades cuyas rentas experimentan variaciones aritméticas, pueden descomponerse en una anualidad de las cuotas bases y una anualidad de los gradientes, siendo la cuota base un importe igual a la primera renta.

De la anualidad de los gradientes se puede obtener su valor presente y convertirse en una anualidad de rentas uniformes a través de una FAS o FRC de gradiente uniforme. Hechas estas conversiones de stock y flujo de efectivo los problemas de gradientes se tratan como anualidades simples a las que le son aplicables los factores financieros.

Una anualidad con gradiente es convencional cuando el primer gradiente aparece en el momento 2, mientras que en una anualidad con gradientes desfasados, el primer gradiente aparece en un momento distinto del 2. Ubicado el momento de inicio de un gradiente desfasado el que se le puede reenumerar como momento 2, su tratamiento es similar al de un gradiente convencional, pero para hallar su valor presente es necesario llevarlo al momento 0 del diagrama del flujo de caja original.

En una anualidad de gradientes negativos, la primera renta es el flujo mayor de la serie, la cual decrece en un importe igual al gradiente negativo.

Las anualidades cuyas rentas crecen geométricamente pueden ser traídas directamente hacia el presente a través de las fórmulas desarrolladas en este capítulo.

XIII

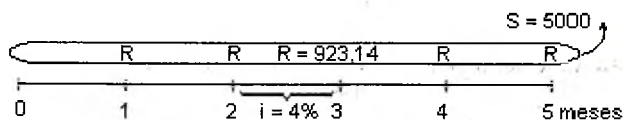
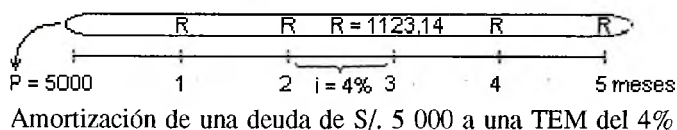
Fondos de amortización

Introducción

Una deuda o una obligación contraída en el presente puede ser extinguida mediante:

- a) Una serie de pagos periódicos parciales, contados desde la fecha del desembolso inicial y destinados a cubrir gradualmente, hasta el vencimiento del plazo pactado, tanto el capital original como los intereses generados por los saldos insolutos.
- b) Una serie de pagos periódicos que devengan intereses y que se van acumulando en un fondo para cancelar toda la deuda con un único pago en la fecha de vencimiento de la obligación.

En el primer caso la deuda se extingue con una *amortización* y en el segundo caso, la deuda o compromiso contraído se extingue con un *fondo de amortización*. Por ejemplo, un crédito de S/. 5 000 contraído a una TEM del 4% se podrá *amortizar* con 5 pagos mensuales vencidos de S/. 1 123,14; mientras que una deuda de S/. 5 000 con vencimiento dentro de 5 meses puede ser cancelada a su vencimiento, con un *fondo de amortización* cuyas rentas mensuales son de S/. 923,14 si se percibe una TEM del 4%.



1. Fondos de amortización

Un *fondo de amortización* es el monto acumulado por una anualidad conformada por rentas periódicas que devengan interés, cuyo objetivo es acumular el importe necesario para cancelar una deuda, una obligación u otro compromiso adquirido en el pasado. Los fondos de amortización son usados para redimir la emisión de bonos, reemplazar activos, cancelar deudas con vencimientos futuros, etc.

Las características principales de un fondo de amortización son:

- El importe de la deuda u obligación a cancelar permanece constante.
- La fecha de vencimiento es conocida e invariable.

Ejemplo 1.- La compañía Cursi emitirá bonos por \$ 500 000 redimibles al término de dos años, los mismos que devengarán una TEA del 4% con pago de interés al final de cada trimestre. Calcule: a) el importe que depositado al inicio de la emisión de los bonos le permitirá cubrir el pago de intereses; b) el importe de cada depósito trimestral a efectuar a un fondo de amortización que le permitan redimir la obligación a su vencimiento. La TEA que puede percibir Cursi es del 7%.

Solución

- a) Capital necesario para generar el pago del interés trimestral
Interés a pagar trimestralmente a una TEA del 4%:

$$I = 500\,000 [1,04^{1/4} - 1] = 4\,926,70$$

Capital necesario para pagar 8 rentas de 4 926,70 percibiendo una TEA del 7%:

$$\begin{aligned} TET &= 1,07^{1/4} - 1 = 0,017058525 \\ P &= 4\,926,70 \cdot FAS_{0,017058525; 8} = 31\,878,24 \end{aligned}$$

b) Importe de cada depósito trimestral para acumular el fondo

$$\begin{aligned} R &= ? & R &= S \cdot FDFA_{0,017058525; 8} \\ S &= 500\,000 & R &= 500\,000 \times 0,1177261905 \\ i &= 0,017058525 & R &= 58\,863,095 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Un fondo de amortización sirve exclusivamente para amortizar el capital de una deuda. Si esta genera intereses entonces será necesario proveer otra fuente diferente a este fondo de amortización, que sirva para cancelar los intereses. En el ejemplo anterior, Cursi puede asegurar el pago de intereses de toda la obligación depositando en la fecha de emisión de los bonos, un capital de \$ 31 878,24. La renta trimestral de \$ 58 863,10 acumulará al vencimiento de la obligación (al finalizar el 8° trimestre) el fondo de \$ 500 000, con el cual se redimirá la obligación.

Ejemplo 2.- Una empresa de arrendamiento financiero ha decidido redimir dentro de 2 años los bonos emitidos en su cuarta serie cuyo importe es de \$ 800 000, para lo cual está calculando el importe de los aportes bimensuales que deberá efectuar a un fondo de amortización, los mismos que pueden ser invertidos a una TET del 3%. ¿A cuánto ascenderá el importe de cada cuota uniforme que acumulará dicho fondo?

Solución

$$\begin{aligned} R &= ? & TEB &= 1,03^{2/3} - 1 = 0,01990131 \\ S &= 800\,000 & R &= S \cdot FDFA_{0,01990131; 8} \\ i &= 0,01990131 & R &= 800\,000 \times 0,07460098375 \\ n &= 12 \text{ bimestres} & R &= 59\,680,79 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.- Un industrial mayorista que confecciona polos ha comprado al crédito un conjunto de 3 máquinas de coser por las que debe cancelar una suma mensual de \$ 680 durante 6 meses. Todas las ventas de su producción diaria

es vendida al contado por lo que ha decidido depositar cada tres días una cantidad uniforme que le permita amortizar las cuotas mensuales. La agencia bancaria con la cual trabaja, ubicada en la misma cuadra donde queda su taller, está pagando una TAMEX del 5% anual. ¿A cuánto ascenderá el importe de cada depósito?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 R = ? & TE \text{ de 3 días} = 1,05^{3/360} - 1 = 0,000406667 \\
 S = 680 & R = S \cdot FDF A_{0,000406667; 10} \\
 i = 0,000406667 & R = 680 \times 0,0998171365 \\
 n = 10 \text{ per. de 3 días} & R = 67,88
 \end{array}$$

Ejemplo 4.- La compañía Pinpersa ha decidido formar un fondo de \$ 3 000 durante un período de 2 años para adquirir una máquina compresora. Para este fin efectúa depósitos uniformes cada fin de quincena por los que percibe una TEA del 8%. ¿Qué importe habrá acumulado al vencimiento del octavo mes?

Solución

$$\begin{array}{ll}
 S_{16} = ? & TEQ = 1,08^{1/24} - 1 = 0,003211857 \\
 S_{48} = 3\,000 & S_{16} = S_{48} \cdot FDF A_{i; n'} \cdot FCS_{i; n'} \\
 n = 48 & S_{16} = 3\,000 \cdot FDF A_{0,003211857; 48} \cdot FCS_{0,003211857; 16} \\
 n' = 16 & S_{16} = 3\,000 \times 0,01930202551 \times 16,39126058 \\
 & S_{16} = 949,15
 \end{array}$$

En el ejemplo anterior se ha calculado directamente el monto de los 16 depósitos al fondo de amortización calculando la renta uniforme: $3\,000 \cdot FDF A_{0,003211857; 48}$, y capitalizándolas directamente a la quincena 16 con un $FCS_{0,003211857; 16}$

2. Fondos de amortización donde la incógnita es n

Los problemas de fondos de amortización donde la incógnita es el tiempo pueden tener múltiples variantes, sin embargo los casos más comunes son:

- Fondos con rentas uniformes donde n es un número entero (ejemplo 5).
- Fondos con rentas uniformes donde n es un número no entero (ejemplo 6).

En ambos casos se aplica la fórmula (66).

- c) Fondos con rentas uniformes y además un depósito inicial en el momento 0 (ejemplo 7). En este caso se sugiere plantear una ecuación de equivalencia y obtener n con un método de interpolación.

Ejemplo 5.- La construcción del segundo piso de un taller de mecánica asciende a \$ 7 985,31 y según la proforma del contratista las condiciones son: \$ 5 000 de cuota inicial y el saldo cancelable en un único pago a más tardar al final del sexto mes. ¿En cuánto tiempo quedará extinguida la deuda si los dueños del taller deciden amortizarla haciendo aportes de \$ 370 quincenales a un fondo que le reporta una TEA del 6%?

Solución

$$n = ?$$

$$S = 2\,985,31$$

$$R = 370$$

$$i = 0,002430821$$

$$TEQ = 1,06^{1/24} - 1 = 0,002430821$$

$$n = \frac{\text{Log}\left[\frac{Si}{R} + 1\right]}{\text{Log}(1 + i)}$$

$$n = \frac{\text{Log}\left[\frac{2\,985,31 \times 0,002430821}{370} + 1\right]}{\text{Log}(1 + 0,002430821)} = 8$$

Cuando $n = 8$, habrán transcurrido 8 quincenas o 4 meses, entonces la deuda podrá ser cancelada al final del cuarto mes.

Ejemplo 6.- Para renovar una máquina cuyo precio está previsto en \$ 7 000, una empresa ha decidido formar un fondo haciendo depósitos trimestrales de \$ 500 los mismos que percibirán una TET del 2%. ¿En cuánto tiempo se acumulará dicho importe?

Solución

$$n = ?$$

$$S = 7\,000$$

$$R = 500$$

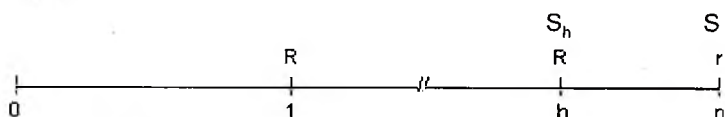
$$i = 0,02$$

$$n = \frac{\text{Log}\left[\frac{Si}{R} + 1\right]}{\text{Log}(1 + i)}$$

$$n = \frac{\text{Log} \left[\frac{7\,000 \times 0,02}{500} + 1 \right]}{\text{Log}(1 + 0,02)} = 12,46602656$$

El valor $n = 12,46602656$ indica que el fondo acumulado hasta el trimestre 12 es menor que \$ 7 000 y si se efectuase 13 depósitos trimestrales uniformes el fondo excedería los \$ 7 000.

Si deseamos acumular los \$ 7 000 en el trimestre 12,46602656, aproximadamente 3 años y 42 días, tenemos que efectuar 12 pagos de \$ 500, y un pago de menor cuantía en el trimestre 12,46602656, el cual lo calculamos con la fórmula que obtendremos a continuación.



n es un número no entero obtenido con la fórmula (66)

h es el máximo entero menor que n

r es la cuota a pagar en el momento n para acumular S

Monto al momento h :

$$S_h = R \cdot \text{FCS}_{i; h}$$

S_h se convertirá en el momento n en

$$S_h (1 + i)^{n - h} = R \cdot \text{FCS}_{i; h} (1 + i)^{n - h}$$

Entonces:

$$r = S - R \cdot \text{FCS}_{i; h} (1 + i)^{n - h}$$

Reemplazando con los datos del problema

$$r = 7\,000 - 500 \text{FCS}_{0,02; 12} (1 + 0,02)^{0,46602656}$$

$$r = 231,7816$$

El fondo de \$ 7 000 se acumulará con 12 rentas trimestrales de \$ 500 y una cuota de 231,7816 en el trimestre 12,46602656, es decir 42 días después de la última cuota de \$ 500. Otras opciones son: realizar 13 pagos trimestrales (12 pagos iguales y el último menor a los anteriores) o en su defecto 12 pagos trimestrales (11 pagos iguales y el último mayor que los anteriores).

Ejemplo 7.- Un taxista cuyo auto rinde 35 km por galón dispone en la fecha de \$ 3 000 importe que depositará en un banco con el objeto de adquirir en el futuro un auto marca Tico, el cual rinde 70 km por galón y cuyo precio al contado es de \$ 8 000. Además puede ahorrar para ese fin un importe diario de \$ 20. ¿En cuánto tiempo acumulará el monto de \$ 8 000 si sus depósitos pueden percibir una TAMEX del 6% anual?

Solución

$$n = ?$$

$$TED = 1,06^{1/360} - 1 = 0,000161871$$

$$S = 8\ 000$$

$$P. FSC_{i;n} + R. FCS_{i;n} = 8\ 000$$

$$P = 3\ 000$$

$$3\ 000 FSC_{0,000161871;n} + 20 FCS_{0,000161871;n} = 8\ 000$$

$$R = 20$$

$$i = 0,000161871$$

Tanteando y dando valores a n para igualar el primer miembro a \$ 8 000

n	239	239,3949	240
$3\ 000 FSC_{i;n} + 20 FCS_{i;n}$	7 991,59	8 000	8 012,88

Interpolando se ha encontrado que el valor de n que hace el primer miembro de la ecuación igual a 8 000 es 239,3949420495.

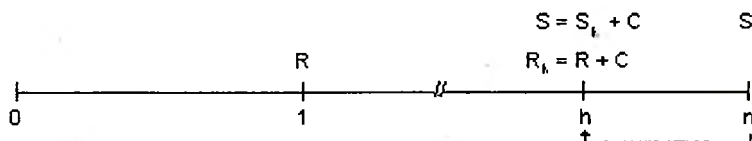
En el presente ejemplo tanto el depósito inicial ubicado en el momento 0, como los depósitos diarios vencidos ganan la TED de 0,0161871% equivalente al 6% efectivo anual. Por lo tanto no es posible aplicar la fórmula del cálculo del tiempo desarrollada en (66) ó (67). Planteada la ecuación de equivalencia se ha obtenido la solución tanteando n para diferentes valores, que hagan el primer miembro de la ecuación igual a 8 000, encontrándose éste entre 239 y 240, valores que interpolados dan la respuesta de 239,39. Como estamos trabajando con una i diaria, la respuesta es 240 días aproximadamente.

3. Pago necesario para acumular el fondo de amortización cuando n no es entero

Cuando n resulta un número no entero al desarrollar la fórmula (66), lo más aconsejable es redondear ese número al entero inferior o al superior para obtener el número de cuotas, alterando de este modo el plazo total del fondo, obteniendo una anualidad impropia cuya última renta será mayor a las anteriores en el primer caso o menor que ellas en el segundo.

La última renta para acumular un fondo igual a S cuando n no es entero puede efectuarse igualando el número de cuotas al entero inferior o al entero superior.

a) Igualando el número de cuotas al entero inferior



Para calcular el monto hasta el período h efectuamos

$$S_h = R \cdot FCS_{i;h}$$

Dado que el monto acumulado hasta el momento h : S_h , es menor que el monto deseado S , debemos hacer un pago adicional C para obtener un importe igual a S .

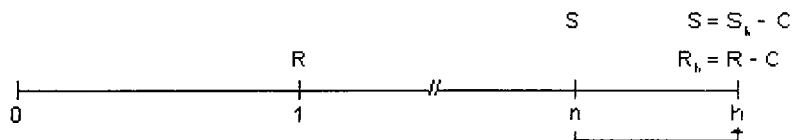
$$\begin{aligned} S &= S_h + C \\ S &= R \cdot FCS_{i;h} + C \\ C &= S - R \cdot FCS_{i;h} \end{aligned}$$

La última renta para acumular un fondo igual a S en el momento h , es:

$$R_h = R + C$$

$$R_h = R + S - R \cdot FCS_{i;h} \quad (96)$$

b) Igualando el número de cuotas al entero superior



Monto en el período h:

$$S_h = R \cdot FCS_{i;h}$$

Dado que S_h va a ser mayor que el monto deseado S tendremos que restarle cierta cantidad C para obtener S .

$$\begin{aligned} S &= S_h - C \\ S &= R \cdot FCS_{i;h} - C \\ C &= R \cdot FCS_{i;h} - S \end{aligned}$$

La renta total en el período h será:

$$\begin{aligned} R_h &= R - C \\ R_h &= R - (R \cdot FCS_{i;h} - S) \end{aligned}$$

$$R_h = R + S - R \cdot FCS_{i;h} \quad (96)$$

Se podrá observar que igualando el número de cuotas al entero inferior o superior se llega a la misma fórmula (96), la cual es aplicable también para anticiparse a un conjunto de cuotas con relación a la fecha de término del fondo.

Ejemplo 8.- En el ejemplo 6 donde $S = \$ 7\,000$, $R = 500$, $i = 0,02$, calcule el importe de la última cuota en el caso que la máquina se adquiera al finalizar:
a) la duodécima quincena; b) la decimotercera quincena.

Solución

a) Importe de la duodécima cuota

$$R_h = R_{12} = ? \qquad R_{12} = R + S - R \cdot FCS_{0,02;12}$$

$$\begin{aligned}
 R &= 500 & R_{12} &= 500 + 7\,000 - 500 \cdot FCS_{0,02;12} \\
 S &= 7\,000 & R_{12} &= 7\,500 - 6\,706,04 \\
 i &= 0,02 & R_{12} &= 793,96 \\
 h &= 12
 \end{aligned}$$

b) Importe de la decimotercera cuota

$$\begin{aligned}
 R_h &= R_{13} = ? & R_{13} &= R + S - R \cdot FCS_{0,02;13} \\
 R &= 500 & R_{13} &= 500 + 7\,000 - 500 \cdot FCS_{0,02;13} \\
 S &= 7\,000 & R_{13} &= 7\,500 - 7\,340,17 \\
 i &= 0,02 & R_{13} &= 159,83 \\
 h &= 13
 \end{aligned}$$

4. Fondos de amortización donde la incógnita es la tasa de interés

Cuando en un problema dado, la incógnita en un fondo de amortización es i , disponiéndose de los demás datos, el problema se soluciona de acuerdo a lo desarrollado en el capítulo VI Anualidades vencidas, punto 6.

Ejemplo 9.- Para renovar su flota de vehículos de transporte una empresa necesita efectuar pagos trimestrales de \$ 20 000. El boletaje de la ventas diarias puede generar para ese proyecto, flujos quincenales de \$ 3 250. ¿A qué TEA deben invertirse esos flujos para cumplir con los pagos trimestrales?

Solución

$$\begin{aligned}
 i &= ? & R &= S \cdot FDFA_{i;n} \\
 S &= 20\,000 & 3\,250 &= 20\,000 \cdot FDFA_{i;6} \\
 R &= 3\,250 \\
 n &= 6 \text{ quincenas} & \text{Tanteando y dando valores a } i \text{ en } FDFA \text{ tenemos:}
 \end{aligned}$$

i	0,01	0,010119	0,011
$20\,000 \cdot FDFA_{i;6}$	3 250,967	3 250,00	3 242,837

Interpolando se ha encontrado que la TEQ a la que deben ponerse los flujos quincenales es del 1,01%; en consecuencia la TEA es del 27,33%.

5. Cuadro del fondo de amortización

Los pagos que periódicamente se efectúan al fondo de amortización se van acumulando y generando, a partir de la fecha del primer depósito y hasta el vencimiento del plazo del fondo, un interés, el cual sumado a las rentas dará el importe de la deuda u obligación que se decidió amortizar en la fecha original. En el Ejemplo 1, la acumulación de los \$ 500 000 al vencimiento del segundo año, percibiendo cada depósito trimestral de \$ 58 863,10 una TEA del 7%, se ha generado del siguiente modo:

Tabla del fondo de amortización

(a) Fin de trim.	(b) Depósito	(c) Interés sobre (e) 1,7058525 %	(d) Adición al fondo	(e) Total en el fondo
1	58 863,10		58 863,10	58 863,10
2	58 863,10	1 004,12	59 867,21	118 730,31
3	58 863,10	2 025,36	60 888,46	179 618,77
4	58 863,10	3 064,03	61 927,13	241 545,89
5	58 863,10	4 120,42	62 983,51	304 529,40
6	58 863,10	5 194,82	64 057,92	368 587,32
7	58 863,10	6 287,56	65 150,65	433 737,97
8	58 863,10	7 398,93	66 262,03	500 000,00
	470 904,76	29 095,24	500 000,00	

Depósito:

Esta columna corresponde a la renta periódica que se efectúa al fondo. En el presente caso, corresponde a la anualidad vencida trimestral de \$ 58 863,10. El primer depósito es a su vez la adición al fondo (d) y el total del fondo (e).

Interés sobre el fondo:

A partir del segundo depósito, el interés del fondo (c), es igual al total en el fondo (e) acumulado en el período anterior multiplicado por la tasa periódica. Para el fin del segundo trimestre el importe del interés del fondo es igual a $\$ 58\,863 \times 0,01058525 = 1\,004,12$.

- Adición al fondo:** Al finalizar cada período la adición al fondo ~~es~~ compuesta por el depósito periódico más el interés generado por el fondo durante el período anterior.
- Total en el fondo:** El total del fondo se constituye por el total en el fondo acumulado hasta el período anterior y la adición efectuada en el último período ($e_2 = e_1 + d_2$).

6. Cálculo del fondo de amortización en una fecha dada

Para conocer en una fecha determinada el monto acumulado de los depósitos efectuados al fondo de amortización, se aplica a la serie uniforme, el FCS.

Ejemplo 10.- En la tabla de fondo de amortización precedente, calcule el importe del fondo: a) al finalizar el sexto depósito; b) al finalizar 14 días después del vencimiento del sexto depósito.

Solución

a) Monto al finalizar el sexto depósito

$$\begin{array}{ll}
 S = ? & S = R \cdot FCS_{i,n} \\
 i = 0,017058525 & S = 58\,863,10 \cdot FCS_{i,6} \\
 n = 6 \text{ trim.} & S = 58\,863,10 \times 6,261772708 \\
 R = 58\,863,10 & S = 368\,587,32
 \end{array}$$

b) Monto al finalizar el día 14 después del sexto depósito

$$\begin{array}{l}
 S = 368\,587,32 \times 1,07^{14/360} \\
 S = 369\,558,41
 \end{array}$$

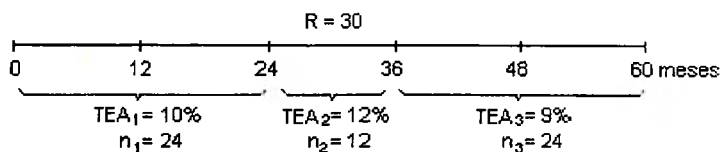
7. Fondos de amortización con variaciones en la tasa de interés

Cuando, durante el plazo total de la anualidad, la tasa de interés sufre variaciones, entonces el monto total del fondo se obtiene llevando parcialmente las rentas con la tasa original hasta la fecha de la primera variación aplicando el FCS y de allí hacia el final del plazo de la anualidad aplicándole a ese monto el FSC tantas veces como variaciones de tasas hayan ocurrido, haciendo

corresponder los períodos de tasas con los períodos de renta. Esta operación se repite con las posteriores series de renta. Una vez ubicadas todas las series uniformes de rentas con distintas tasas, al final del plazo, se procede a sumarlas para obtener el monto del fondo.

Ejemplo 11.- Un trabajador afiliado a la AFP El Eucalipto, ha cotizado a su fondo de pensiones mensualmente durante 5 años el 10% de su sueldo equivalente a \$ 30. ¿Qué importe habrá acumulado al finalizar ese plazo si las inversiones de El Eucalipto generó una rentabilidad del 10% anual durante los dos primeros años, el tercer año fue del 12% y de allí en adelante el 9%?

Solución



$$n_1 = 24 \text{ meses}$$

$$n_2 = 12 \text{ meses}$$

$$n_3 = 24 \text{ meses}$$

$$TEM_1 = 1,10^{1/12} - 1 = 0,00797414$$

$$TEM_2 = 1,12^{1/12} - 1 = 0,009488793$$

$$TEM_3 = 1,09^{1/12} - 1 = 0,007207323$$

$$S = 30 FCS_{0,00797414; 24} \times 1,12 \times 1,09^2 + 30 FCS_{0,009488793; 12} \times 1,09^2 + 30 FCS_{0,007207323; 24}$$

$$S = 1\,051,30 + 450,76 + 782,95$$

$$S = 2\,285,02$$

- La primera serie de rentas se ha capitalizado a una TEM del 0,797414% durante 24 meses (2 años) y ese stock ha sido llevado al final del tercer año con un FSC a una TEA del 12%. Ese monto al final del tercer año ha sido llevado al final del quinto año con un FSC a una TEA del 9%.
- La segunda serie se ha capitalizado a una TEM del 0,9488793% durante 12 meses (final del tercer año) y ese stock ha sido llevado al final del quinto año con un FSC a una TEA del 9% durante dos años.
- La tercera serie se ha capitalizado a una TEM del 0,7207323 durante los últimos 24 meses ubicándola al final del quinto año.

La suma de esos importes ascendentes a \$ 2 285,02 será el monto acumulado durante los cinco años de aportes al fondo de pensiones.

8. Listado de fórmulas

$$R_h = R + S - R FCS_{i, h} \quad (96) \quad \text{Pago único necesario en cualquier fecha para acumular el fondo de amortización}$$

9. Problemas propuestos

Fondos de amortización

1. Para la emisión de la primera serie de bonos por un importe equivalente de \$ 100 000 redimible dentro de 5 años, los mismos que pagarán al vencimiento de cada trimestre una tasa del 2%, las autoridades competentes exigen a la compañía solicitante, la garantía de un importe en efectivo cuyo rendimiento del 10% efectivo anual asegure el pago de intereses de los bonos hasta la fecha en que sean redimidos y, además, la creación de un fondo con aportes uniformes semestrales vencidos. El fondo tendrá un rendimiento efectivo anual del 9%. Calcule a) el importe de la garantía a depositar en la fecha de emisión de los bonos, b) el importe de las cuotas fijas que acumularán el fondo necesario para redimir los bonos. Rp. a) $P = \$ 31\,440,95$; b) $R = \$ 8\,174,66$.

Fondos de amortización donde la incógnita es el tiempo

2. Una empresa mayorista, cuyas ventas de mostrador son al contado, ha recibido una proforma de una máquina cuyo precio al contado es de \$ 3 209,13 y con una vigencia de 3 meses. La empresa para tal fin puede generar flujos de caja de \$ 400 cada seis días y depositarlos en un banco ganando una TEA del 5%. ¿En cuánto tiempo podrá adquirir dicha máquina? Rp. dentro de 48,31 días.
3. La empresa Uniformes S.A. ha decidido formar un fondo para cambiar sus máquinas manuales por otras automatizadas cuyos precios serán de \$ 12 000. En el planeamiento financiero realizado se ha determinado que dicha empresa generará para ese fin, flujos de caja mensuales de \$ 400; además estima que el valor de remate de sus actuales máquinas en la fecha que decida renovarlas no será inferior a \$ 3 000. Si los depósitos al fondo de amortización pueden generarle una TAMEX del 6% anual ¿en qué fecha podrá renovar su maquinaria textil? Rp. Dentro de 21,40 meses.

Depósito inicial más rentas uniformes

4. Para la compra de una oficina evaluada en \$ 20 000 una compañía de auditores ha decidido abrir una cuenta con un depósito inicial de \$ 8 000 a la que irá adicionando cada fin de mes \$ 500. Por dichos depósitos, la institución financiera les paga una TEA del 7%, ¿dentro de cuánto tiempo podrán adquirir la oficina? Rp. Dentro de 20,81 meses.

Pago único necesario en cualquier fecha para acumular el fondo de amortización

5. En el problema 4 calcule el importe de la última cuota si los auditores deciden disponer el fondo de \$ 20 000 al término de un año. Rp. $R_{12} = \$ 5\,749,85$.

Fondos de amortización donde la incógnita es la tasa de interés

6. La Casa Hirakona vende órganos electrónicos al contado a un precio de \$ 1 000. Al crédito puede ser adquirido con una cuota inicial de \$ 300 y 4 cuotas quincenales de \$ 220, al término de cuyo plazo recién será entregado el órgano. ¿Qué TEA se está cargando en esta venta? Rp. TEA = 848,32%.

Cuadro del fondo de amortización

7. Con los datos del problema 6 prepare un cuadro del fondo de amortización que permita adquirir el órgano al contado al final de la cuarta quincena. Rp. $R = S/. 216,02$.

Cálculo del fondo de amortización en una fecha dada

8. Un trabajador afiliado a una AFP tuvo como sueldo promedio mensual durante el primer año S/. 800, durante el segundo año S/. 1 100 y durante el tercer año S/. 1 500. ¿Qué importe habrá acumulado en su cuenta de capitalización individual al finalizar el tercer año, si las aportaciones obligatorias son el 10% del sueldo mensual y el rendimiento ha sido del 8% efectivo anual? Rp. $S = S/. 4\,502,46$.

Fondos de amortización con variaciones en la tasa de interés

9. Al finalizar el primer año de aportaciones mensuales a la AFP Propasado, un trabajador cuyos sueldos durante el año habían sido S/. 800 los dos primeros meses, S/. 900 los seis meses siguientes y S/. 1 000 los 4 meses restantes, hace la siguiente pregunta al ejecutivo de cuentas: ¿cuál es el monto de mi fondo sabiendo que las aportaciones son el 10% del sueldo y que los aportes se han invertido en valores que en promedio han rendido: 8% anual, del primer al tercer mes, 9% anual del cuarto al quinto mes, 11% anual el sexto mes y 9,5% anual del séptimo al duodécimo mes? Responda la pregunta del trabajador. Rp. S/. 1 145.04.

10. Resumen del capítulo

Un fondo de amortización es el resultado del proceso mediante el cual un conjunto de rentas invertidas van generando interés y se acumulan, período a período, con el objeto de que al vencimiento del plazo previsto puedan extinguir una deuda u obligación que permanece invariable y cuyo importe es conocido previamente. Se crean fondos para redimir obligaciones, reemplazar activos, cancelar compromisos de pago, etc. Conocido el monto a acumular, la renta se calcula aplicándole el FDFA con la tasa y períodos de tiempo conocidos. En los problemas con fondos de amortización pueden calcularse: el tiempo, la tasa, el fondo con variaciones de tasa o sin ella. En los problemas de tiempo puede ocurrir que el número de períodos no sea entero, en cuyo caso pueden calcularse la última renta redondeando el número de cuotas al inmediato inferior o superior, obteniendo una anualidad impropia. Puede calcularse el importe acumulado en cualquier fecha, preparando una Tabla de Fondo de Amortización o capitalizando los aportes con el FCS o con un conjunto de factores múltiples.

XIV

Amortización

Introducción

Amortización es el proceso financiero mediante el cual una deuda u obligación y los intereses que generan, se extinguen progresivamente por medio de pagos periódicos o servicios parciales, que pueden iniciarse conjuntamente con la percepción del stock de efectivo recibido (flujos anticipados), al vencimiento de cada período de pago (flujos vencidos), o después de cierto plazo pactado originalmente (flujos diferidos). De cada pago, cuota o servicio, una parte se aplica a cubrir el interés generado por la deuda y el resto a disminuir el saldo insoluto. Se infiere que si el pago parcial efectuado es tan pequeño que no puede cubrir ni siquiera el interés generado por el saldo insoluto, entonces la diferencia no cubierta es capitalizada.

A partir del día siguiente al vencimiento de cada cuota, si ésta no hubiese sido amortizada completamente, la parte no amortizada de ella, entrará en *mora* generando diariamente un *interés de mora*, independientemente del interés compensatorio que genera el saldo insoluto.

Cuando un préstamo está en mora, cada pago, hasta donde alcance, debe aplicarse para cancelar la deuda en el siguiente orden:

- Interés de mora
- Interés compensatorio
- Principal vencido

Si quedase algún remanente, la diferencia será aplicada para cubrir:

- Intereses no vencidos pero devengados hasta la fecha del pago
- Principal por vencer

Contablemente, *amortizar* es el proceso que consiste en disminuir el valor de un activo, cargando este importe a gastos. En el presente libro tomaremos el concepto financiero de amortización y no el contable.

Los problemas de amortización involucran:

- El importe de los pagos periódicos que pueden ser uniformes o irregulares.
- El número de pagos cuyos plazos pueden ser uniformes o irregulares.
- La tasa de interés que puede ser fija, variable o implícita.
- La formulación de las tablas de amortización conocidas también como cuadros de servicio de la deuda o de reembolsos de préstamos.

1. Tabla de reembolso de préstamos o servicio de la deuda

Conjuntamente con el desembolso inicial del préstamo, cuando éste se otorga en partes, o con su desembolso total, se emite una tabla referencial de reembolso, llamada así porque su elaboración supone:

- a) La invariabilidad de la tasa de interés durante todo el plazo del crédito.
- b) La cancelación de las cuotas exactamente el día de su vencimiento.
- c) El desembolso del crédito en una única armada.

Las tres suposiciones generalmente no se cumplen en la práctica por algunos de los motivos siguientes:

- a) En nuestro país las tasas son variables pudiendo incrementarse o disminuir durante el plazo del crédito.
- b) Los prestatarios pueden pagar sus cuotas con algunos días de atraso o anticiparse en sus pagos. En el primer caso serán penalizados con una tasa de mora. En el segundo, podrá descontarse la cuota con la tasa vigente, tantos días como falten para su vencimiento.

- c) Un crédito aprobado por una institución financiera puede ser desembolsado en partes por la entidad financiadora.

Por los motivos expuestos es necesario preparar tablas definitivas que contemplen las variaciones ocurridas durante el plazo de vigencia del préstamo.

Elementos de la tabla de reembolso.- Una tabla de reembolso puede tener diferentes formatos, de acuerdo con los criterios de la empresa que otorga los préstamos. Sin embargo, éstas generalmente adoptan los modelos 1, 2, o una combinación de ambos.

Modelo 1

No. o fecha	Servicio	Cuota interés	Cuota capital	Deuda residual	Deuda extinguida
-------------	----------	---------------	---------------	----------------	------------------

Modelo 2

No. o fecha	Cuota	Interés	Amortización	Saldo insoluto	Deuda extinguida
-------------	-------	---------	--------------	----------------	------------------

- No. o fecha** Indica el número del servicio o cuota, o su fecha de vencimiento.
- Servicio o cuota** Suma de la cuota interés y de la cuota capital. El servicio puede incluir sólo cuota interés o sólo cuota capital, de acuerdo como haya sido pactado el préstamo.
- Cuota interés** Importe devengado por la aplicación de la tasa periódica del préstamo sobre la deuda residual.
- Cuota capital** Importe calculado de acuerdo al sistema de reembolso pactado. Al vencimiento de cada cuota disminuye la deuda residual.
- Deuda residual** Saldo del préstamo original en cualquier momento. En el momento 0 la deuda residual es igual al importe recibido en préstamo.
- Deuda extinguida** Importe acumulado de las cuotas capitales vencidas. Al vencimiento de todos los servicios será igual al importe original del préstamo.

2. Sistemas de repago de préstamos

Para reembolsar un préstamo, formalizado mediante un contrato con una entidad financiera y regulado por las entidades competentes, pueden aplicarse diversos sistemas, limitados solamente por el principio de equivalencia financiera, por medio del cual, la suma de las cuotas evaluadas a valor presente con la tasa de interés o combinación de tasas pactadas deben ser iguales al importe del crédito original. Los principales sistemas de repago de préstamos son:

Sistema de repago	Modalidad
Cuotas constantes (francés)	Vencidas Vencidas en períodos variables Anticipadas Diferidas
Amortización constante (alemán)	
Interés constante (inglés)	
Cuotas crecientes	Aritméticamente Geométricamente Periódicamente Suma de números dígitos
Reajuste de deudas	
Combinados	

- Cuota constante

Calculada con el FRC, se compone de la cuota interés y la cuota capital. La primera es generada por la deuda residual y la segunda constituida por la diferencia de la cuota constante y la cuota interés. Tiene por objeto disminuir el capital adeudado. A medida que devenga cada servicio, la cuota capital

- experimenta un incremento geométrico de razón $(1 + i)$ cuyo importe es igual al decremento que experimenta la cuota interés.
- **Amortización constante** Calculada dividiendo el importe del préstamo original entre el número de servicios. Este sistema origina en cada servicio una cuota interés decreciente aritméticamente.
 - **Interés constante** Al vencimiento de cada servicio se paga sólo el interés devengado por la deuda residual y en el último servicio, además del interés, se amortiza el capital original.
 - **Cuotas crecientes** Que crecen de acuerdo con una ley predeterminada: progresión aritmética, geométrica, series escaladas, etc.
 - **Reajuste de deudas** Se realiza sobre la base de un factor de indexación.
 - **Sistemas combinados** Agrupa algunos de los descritos anteriormente o incluso otros sistemas.

3. Cuotas constantes vencidas

En el sistema de repago por medio de cuotas constantes, conocido también como método francés, las cuotas son calculadas con el FRC según lo explicado en los capítulos de anualidades. El desarrollo práctico de este sistema lo explicaremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.- Prepare la tabla referencial de reembolso de un préstamo de S/. 10 000 desembolsado el 8 de marzo, el mismo que debe ser cancelado con 6 cuotas constantes cada fin de trimestre con una TET del 5%. Grafique el comportamiento de la amortización e interés de cada cuota.

Solución

$$R = ?$$

$$P = 10\,000$$

$$n = 6 \text{ trim.}$$

$$i = 0,05$$

$$R = P \cdot \text{FRC}_{0,05; 6}$$

$$R = 10\,000 \cdot \text{FRC}_{0,05; 6}$$

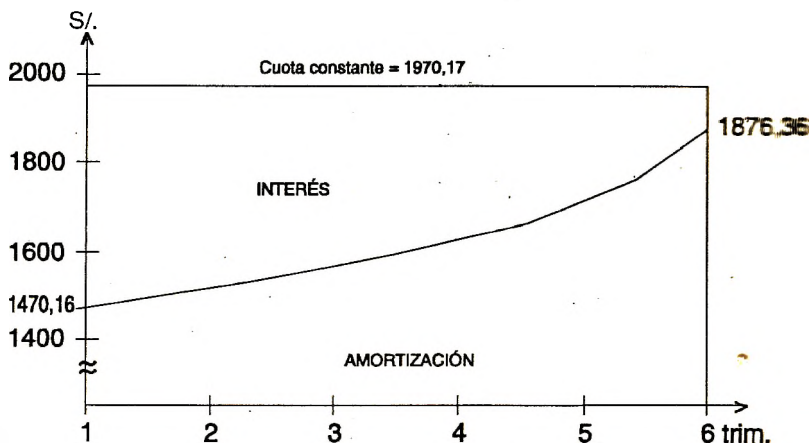
$$R = 10\,000 \times 0,1970174681$$

$$R = 1\,970,17$$

Tabla referencial de reembolso

Fecha	Días	n	Cuota	Interés	Amor- tización	Saldo	Demanda en terminación
Mar. 08		0				10 000,00	
Jun. 06	90	1	1 970,17	500,00	1 470,17	8 529,83	
Set. 04	90	2	1 970,17	426,49	1 543,68	6 986,14	
Dic. 03	90	3	1 970,17	349,31	1 620,87	5 365,27	
Mar. 03	90	4	1 970,17	268,26	1 701,91	3 663,36	
Jun. 01	90	5	1 970,17	183,17	1 787,01	1 876,36	
Ago. 30	90	6	1 970,17	93,82	1 876,36	0,00	
	540		11 821,05	1 821,05	10 000,00		

Gráfico de las cuotas constantes



En la tabla referencial de reembolso se observa que:

- las amortizaciones tienen un crecimiento geométrico de razón $(1+i)$,
- en cada cuota, el incremento de la amortización es igual al decremento del interés.

Las cuotas, intereses, amortizaciones y saldos de la tabla referencial de reembolso pueden referirse al número de cuota a las que pertenecen o a sus

fechas de vencimiento. Si empleamos el número de cuota designaremos los componentes de la tabla:

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				P
1	R_1	I_1	A_1	S_1
2	R_2	I_2	A_2	S_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	R_n	I_n	A_n	S_n

Cálculos

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				$S_0 = P$
1	R_1	$I_1 = S_0 i$	$A_1 = R_1 - I_1$	$S_1 = S_0 - A_1$
2	R_2	$I_2 = S_1 i$	$A_2 = R_2 - I_2$	$S_2 = S_1 - A_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	R_n	$I_n = S_{n-1} i$	$A_n = R_n - I_n$	$S_n = S_{n-1} - A_n = 0$

- **Cuota** Corresponde a R de la anualidad vencida calculada sobre P con el FRC. Es igual al interés más la amortización:

$$R_1 = I_1 + A_1$$

$$R_2 = I_2 + A_2 \text{ etc.}$$

- **Interés** Denominado también cuota interés, es generado por el saldo insoluto del préstamo. En la fecha del desembolso el saldo insoluto corresponde a la deuda original y va disminuyendo en la medida en que el saldo que lo origina también disminuye. Este interés sobre los saldos pendientes se conoce como *interés al rebatir*.
- **Amortización** Denominada también cuota capital, es la diferencia entre el importe de la cuota y el interés generado por el saldo insoluto. La suma de las amortizaciones es conocida como *deuda extinguida*.
- **Saldo insoluto** Denominado también deuda residual, después del desembolso inicial es la diferencia entre el saldo anterior y

la amortización efectuada. En la fecha del desembolso, el saldo insoluto es el importe de éste y representa el valor actual de todas las cuotas por vencer, el cual va extinguiéndose progresivamente hasta llegar a 0 en la fecha del vencimiento del plazo pactado, siempre y cuando se haya cumplido estrictamente el compromiso de pago.

3.1 Cálculo de la cuota constante cuando el préstamo se desembolsa en partes

Los créditos aprobados por las entidades bancarias pueden desembolsarse total o parcialmente, efectuando los respectivos abonos en la cuenta corriente del pretatario. Los principales motivos que originan los desembolsos parciales son:

- a) En financiaciones de proyectos, cuando debe cumplirse un calendario de inversiones previamente establecido, conocido como plan de inversión.
- b) Cuando la entidad financiadora, previo a los desembolsos, exige el cumplimiento de condiciones adicionales al cliente, como por ejemplo: aumento del capital social, capitalización de utilidades, acuerdo de directorio de no repartir utilidades durante la vigencia del préstamo, inscripción de la prenda industrial en los Registros Públicos, etc.
- c) Falta de liquidez de la entidad financiadora.

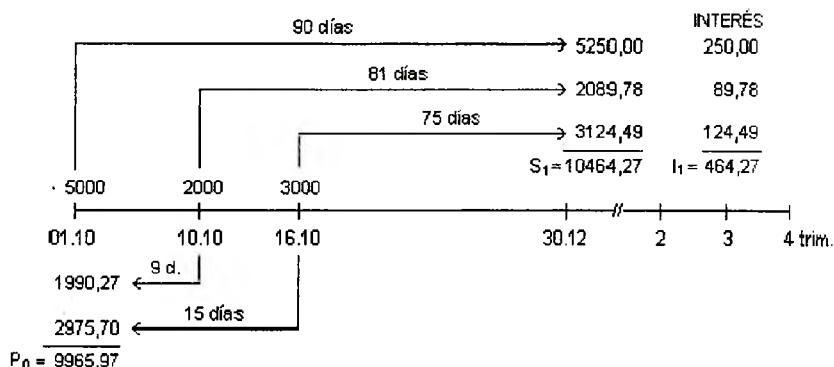
Un desembolso parcial origina una variedad de cálculos alternativos de equivalencia financiera con el objeto de cumplir con la tasa efectiva vigente para las operaciones activas. A través de ejemplos mostraremos los procedimientos de equivalencia utilizados.

Ejemplo 2.- Una institución de crédito aprueba a un cliente un préstamo por S/. 10 000 a ser amortizado en 4 cuotas uniformes cada 90 días aplicando una TET del 5%. Los desembolsos se efectuarán de acuerdo al siguiente cronograma:

Fecha	Días	Acum.	Importe	Desembolso
Oct. 01	0	0	5 000	1°
Oct. 10	9	9	2 000	2°
Oct. 16	6	15	3 000	3°
Dic. 30	75	90		

Se pide construir la Tabla de Reembolso considerando los desembolsos parciales efectuados.

Solución



El cálculo del importe de la cuota constante puede ser efectuado:

- Llevando los desembolsos parciales hacia S_1 (día 90) y en esa fecha calcular la cuota constante como una cuota fija anticipada. Se recomienda este procedimiento considerando que las entidades financieras utilizan sistemas mecanizados que controlan *diariamente* los intereses y vencimientos de cuotas.
- Llevando los desembolsos parciales hacia el presente para encontrar P . La cuota constante se obtiene aplicando el FRC a P , considerando el número de cuotas por vencer. Para calcular el interés I_1 de la cuota R_1 debe calcularse independientemente el interés generado por cada desembolso, llevando los desembolsos al futuro y restándole su valor presente. Este procedimiento incluye el cálculo de los valores presentes de los desembolsos parciales y de los intereses de cada desembolso en la fecha de vencimiento de la cuota.

Ambas operaciones se desarrollan:

- a) Calculando el importe de las cuotas constantes al vencimiento de R_1 , en el día 90 el importe capitalizado de los desembolsos parciales es:

$$\begin{aligned} S_1 &= 5\,000 \times 1,05 + 2\,000 (1,05^{81/90}) + 3\,000 (1,05^{75/90}) \\ S_1 &= 5\,250,00 + 2\,089,78 + 3\,124,49 \\ S_1 &= 10\,464,27 \end{aligned}$$

El interés acumulado al día 90 por cada desembolso es:

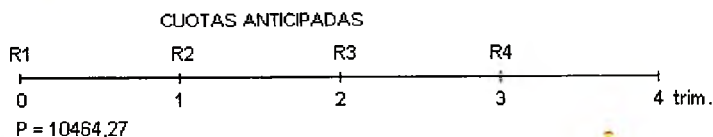
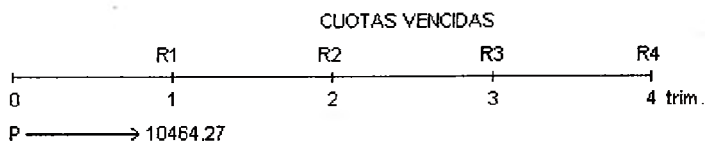
$$\begin{aligned} I_1 &= 250,00 + 89,78 + 124,49 \\ I_1 &= 464,27 \end{aligned}$$

La cuota constante en el día 90 se calcula como una renta anticipada donde S_1 (equivalente de P) es la suma de los desembolsos parciales capitalizados ascendentes a S/. 10 464,27.

$$\begin{aligned} R(1+i) &= S_1 \cdot \text{FRC}_{0,05;4} \\ R(1,05) &= 10\,464,27 \cdot \text{FRC}_{0,05;4} \\ R &= 2\,810,52 \end{aligned}$$

En el día 90 el importe de los desembolsos capitalizados menos la cuota que se debe cancelar constituye su saldo insoluto ($10\,464,27 - 2\,810,52 = 7\,653,75$).

En el diagrama de tiempo valor de los flujos, pueden verse las diferencias del tratamiento de R_1 como cuota anticipada:



La cuota R_1 se compone del siguiente modo:

Interés	464,87
Amortización	2 345,65
Cuota Fija R_1	2 810,52

La tabla de reembolso al finalizar la cuota R_1 es:

Tabla de reembolso al 30-12

Fecha	Días	n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
Oct. 01		0				5 000,00
Oct. 10	9			250,00		7 000,00
Oct. 16	15			339,78		10 000,00
Dic. 30	90	1	2 810,52	464,27	2 346,25	7 653,75
Mar. 30	90	2	2 810,52	382,69	2 427,83	5 225,91
Jun. 28	90	3	2 810,52	261,30	2 549,23	2 676,69
Set 26	90	4	2 810,52	133,83	2 676,69	0,00
	540		11 242,09	1 242,09	10 000,00	

b) Obteniendo el valor presente de los desembolsos parciales

$$P = 5\,000 + 2\,000 (1,05^{9/90}) + 3\,000 (1,05^{15/90}) = 9\,965,97$$

$$R = 9\,965,97 \cdot FRC_{0,05;4} = 2\,810,52$$

las cuotas se consistencian evaluándolas a valor presente, cuyo resultado debe ser S/. 9 965,97 (equivalente de los desembolsos de S/. 10 000).

$$P = 2\,810,52 \text{ FAS}_{0,05;4}$$

$$P = 9\,965,97$$

3.2 Cálculo de la cuota constante cuando existen variaciones de tasa

Cuando un préstamo ha sido desembolsado en una sola armada o en partes y además se dan variaciones de tasas antes del vencimiento de cada cuota, se sugiere calcular las cuotas a su vencimiento, aplicando el procedimiento descrito anteriormente en el punto 3.1.

Ejemplo 3.- Un préstamo de S/. 10 000 ha sido otorgado para ser reembolsado en cuatro cuotas fijas trimestrales vencidas aplicando una TET de 5%. Al vencimiento de la primera cuota se han producido las siguientes variaciones de tasas trimestrales: 5% durante 40 días, 4% durante los 20 días siguientes y 3% hasta el vencimiento de la primera cuota. Prepare: a) la tabla referencial de reembolso; b) la tabla de reembolso al vencimiento de la primera cuota.

Solución

a) Tabla referencial de reembolso

$$R = P \cdot \text{FRC}_{0,05;4}$$

$$R = 10\,000 \times 0,2820118326 = 2\,820,12$$

Tabla referencial de reembolso

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				10 000,00
1	2 820,12	500,00	2 320,12	7 679,88
2	2 820,12	383,99	2 436,12	5 243,76
3	2 820,12	262,19	2 557,93	2 685,83
4	2 820,12	134,29	2 685,83	0,00
	11 280,47	1 280,47	10 000,00	

b) Tabla de reembolso al vencimiento de la primera cuota

$$S_1 = 10\,000 (1,05^{40/90}) (1,04^{20/90}) (1,03^{30/90})$$

$$S_1 = 10\,410,74$$

$$I_1 = 10\,410,74 - 10\,000$$

$$I_1 = 410,74$$

$$R (1 + i) = S_1 \cdot \text{FRC}_{0,03;4}$$

$$R (1,03) = 10\,410,74 \cdot \text{FRC}_{0,03;4}$$

$$R = 2\,719,20$$

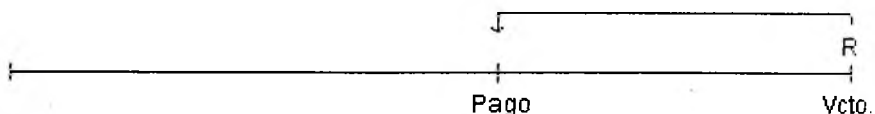
Tabla de reembolso al vencimiento de R_1

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				10 000,00
1	2 719,20	410,74	2 308,45	7 691,55
2	2 719,20	230,75	2 488,45	5 203,10
3	2 719,20	156,09	2 563,10	2 640,00
4	2 719,20	79,20	2 640,00	0,00
	10 876,78	876,78	10 000,00	

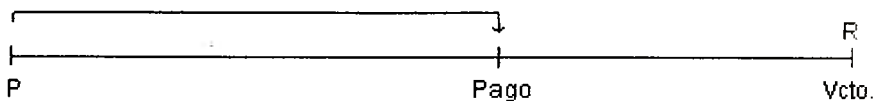
3.3 Pagos en fechas anteriores al vencimiento de la cuota fija

Cuando un cliente efectúa un pago anticipándose a la fecha de vencimiento de la cuota establecida en la tabla de reembolso, los procedimientos de equivalencia financiera a adoptar pueden efectuarse:

- a) descontando la cuota desde la fecha de vencimiento original a la fecha de pago, sin alterar la fecha de vencimiento de toda la operación; o



- b) calculando los intereses del principal por vencer hasta la fecha del pago de la cuota y en esa fecha adicionar la cuota capital por vencer establecida en la tabla de reembolso.



Ejemplo 4.- Calcule: a) la cuota fija de un préstamo de S/. 10 000 cuyo cronograma de desembolsos es: S/. 5 000 el 1 de octubre, S/. 2 000 el 10 de octubre y S/. 3 000 el 16 de octubre. El préstamo debe ser reembolsado en cuatro cuotas trimestrales vencidas con una TET del 5%; b) Si el 30 de diciembre el cliente canceló oportunamente la cuota fija calculada en a) y la

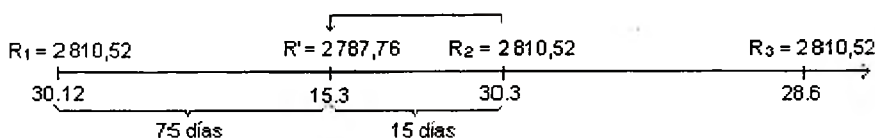
segunda cuota que vence el 30 de marzo la decide cancelar el 15 de marzo, ¿qué importe debe abonar en esa fecha?

Solución

a) La cuota fija de S/. 2 810,52 ha sido calculada en el ejemplo 2.

b) Cálculo de la cuota anticipándose a su vencimiento

Descontando la cuota a la fecha de pago

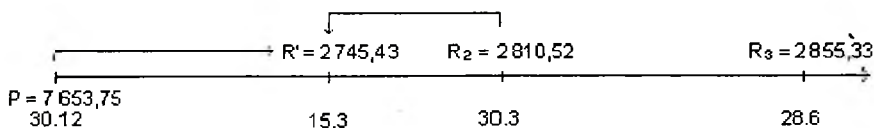


Para conocer los nuevos importes de A_2 e I_2 la cuota R_2 se actualiza separando la cuota interés y la cuota capital :

	30.03	Descuento	15.03
I_2	382,69	$382,69 [1,05 \cdot (15/90)]$	379,59
A_2	2 427,83	$2 427,83 [1,05 \cdot (15/90)]$	2 408,17
Cuota	2 810,52	$2 810,52 [1,05 \cdot (15/90)]$	2 787,76

El efecto de adelantarse a la fecha de vencimiento de la cuota se manifiesta disminuyendo su importe de S/. 2 810,52 a S/. 2 787,76 sin modificar el calendario de pagos, por lo tanto la tercera cuota R_3 vencerá el 28 de junio sin variación en su importe de S/. 2 810,52.

Calculando los intereses del principal por vencer hasta la fecha del pago de la cuota



Se calculan los intereses I_2 generados por el principal por vencer $P_1 = 7\,653,75$ hasta la fecha en que se adelanta el pago (75 días) y en esa fecha se le suma la amortización $A_2 = 2\,427,83$ que le corresponde a la cuota R_2 .

Cuota R_2		Importe
Interés I_2	7 653,75 $[1,05^{75/90} - 1]$	317,60
Amortización A_2		2 427,83
Total		2 745,43

El importe de la cuota $R_3 = 2\,855,33$ incluye:

- intereses por 105 días que generará $P_2 = 5\,225,91$ (los 15 días correspondientes a R_2 más los 90 días que corresponden a R_3).

$$I_3 = 5\,225,91 \times 1,05^{105/90} - 1 = 306,10$$

- la amortización $A_3 = 2\,549,23$ que le corresponde según la tabla de reembolso.

3.4 Pagos cuyos importes son mayores a la cuota fija

Cuando un cliente paga un importe mayor al de su cuota, la diferencia, de no existir mora, deberá aplicarse a disminuir el importe del principal por vencer, con lo cual los intereses a rebatir de la siguiente cuota experimentarán una disminución.

Ejemplo 5.- Una empresa solicita un préstamo de S/. 10 000 para amortizarlo con 4 cuotas constantes de S/. 2 885,91 cada fin de trimestre. El banco cobra una TET del 6%. Al vencimiento de la primera cuota la empresa abona S/. 3 500. Calcule el importe de las 3 cuotas restantes.

Solución

Pago	Cuota	Saldo
3 500,00	2 885,91	614,09

Saldo al final de la primera cuota 7 714,09
 Aplicación del saldo (614,09)

Principal al inicio de la segunda cuota 7 100,00

Importe de las cuotas restantes:

$$R = 7\,100 \text{ FRC}_{0,06;3} = 2\,656,18$$

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				14 000,00
1	2 885,91	600,00	2 285,91	11 714,09
2	2 885,91	462,85	2 423,07	9 291,02
3	2 885,91	317,46	2 568,45	6 722,57
4	2 885,91	163,35	2 722,56	4 000,01
	11 543,66	1 543,66	10 000,00	

3.5 Cálculo de la cuota capital en cualquier cuota constante

La amortización o *cuota capital* es la parte de la *cuota constante* que se aplica a disminuir el importe de la deuda contraída. La *cuota capital* puede ser calculada en función de:

- La cuota constante
- El préstamo
- El importe de la primera cuota

3.5.1 Cuota capital en función de la cuota constante

En las siguientes ecuaciones k es siempre un entero positivo que hace referencia al período del que se está calculando la cuota interés, la cuota capital y la deuda residual. De la tabla Cálculos de la página 406 podemos deducir

n	Cuota	Cuota interés	Cuota capital	Deuda residual
0			$A_0 = 0^*$	$S_0 = P$
1	R	$I_1 = (P - A_0) i$	$A_1 = R - (P - A_0) i$	$S_1 = P - A_1$
2	R	$I_2 = (P - A_0 - A_1) i$	$A_2 = R - (P - A_0 - A_1) i$	$S_2 = P - A_1 - A_2$
:	:	:	:	:
n	R	$I_n = (P - A_0 - A_1 - \dots - A_{n-1}) i$	$A_n = R - (P - A_0 - A_1 - \dots - A_{n-1}) i$	$S_n = P - A_0 - A_1 - \dots - A_n = 0$

* Asumimos $A_0 = 0$ para que se cumplan las formulas que obtendremos a continuación

equivalente a

n	Cuota	Cuota interés	Cuota capital	Deuda residual
1	R	$I_1 = \left(P - \sum_{j=0}^0 A_j \right) i$	$A_1 = R - \left(P - \sum_{j=0}^0 A_j \right) i$	$S_1 = P - \sum_{j=1}^1 A_j$
2	R	$I_2 = \left(P - \sum_{j=0}^1 A_j \right) i$	$A_2 = R - \left(P - \sum_{j=0}^1 A_j \right) i$	$S_2 = P - \sum_{j=1}^2 A_j$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	R	$I_n = \left(P - \sum_{j=0}^{n-1} A_j \right) i$	$A_n = R - \left(P - \sum_{j=0}^{n-1} A_j \right) i$	$S_n = P - \sum_{j=1}^n A_j$

De la tabla anterior podemos concluir que

$$S_k = P - \sum_{j=1}^k A_j \quad (2)$$

$$I_k = \left(P - \sum_{j=0}^{k-1} A_j \right) i \quad (3)$$

$$A_k = R - \left(P - \sum_{j=0}^{k-1} A_j \right) i$$

Obtención de A en función de R

Cuota capital 1	Cuota capital 2
$A_1 = R - I_1$ pero $I_1 = Pi$	$A_2 = R - I_2$
$A_1 = R - Pi$ pero $P = R \text{ FAS}_{i,n}$	$A_2 = R - (P - A_1) i$

(continúa)

(continuación)

Cuota capital 1	Cuota capital 2
$A_1 = R - R \text{FAS}_{i;n} i$ $A_1 = R (1 - \text{FAS}_{i;n} i)$	$A_2 = R - P_i + A_1 i$ pero $R - P_i = A_1$ $A_2 = A_1 + A_1 i$
$A_1 = R \left\{ 1 - \frac{i[(1+i)^n - 1](1+i)^{-n}}{i} \right\}$	$A_2 = A_1 (1+i)$ pero $A_1 = R (1+i)^{-n}$
$A_1 = R \{1 - [1 - (1+i)^{-n}]\}$	$A_2 = R (1+i)^{-n} (1+i)$
$A_1 = R (1+i)^{-n}$ (a)	$A_2 = R (1+i)^{-n+1}$ (b)

Analizando (a) y (b) podrá notarse que si $k = 1$ o $k = 2$ entonces se cumple

$$A_k = R (1+i)^{k-1-n} \quad (97)$$

Utilizando el método inductivo puede demostrarse que la fórmula se cumple para todo k entero positivo.

Ejemplo 6.- Un proyecto de inversión demanda un financiamiento bancario de S/. 10 000 que será amortizado en 8 cuotas trimestrales uniformes vencidas a una TET del 6%. ¿Cuál será el importe de la séptima cuota capital?

Solución

$A_7 = ?$	$R = P \cdot \text{FRC}_{0,06;8}$	$A_k = R (1+i)^{k-1-n}$
$P = 10\,000$	$R = 10\,000 \cdot \text{FRC}_{0,06;8}$	$A_7 = 1\,610,36 \times 1,06^{7-1-8}$
$n = 8 \text{ trim.}$	$R = 10\,000 \times 0,1610359426$	$A_7 = 1\,610,36 \times 1,06^{-2}$
$i = 0,06$	$R = 1\,610,36$	$A_7 = 1\,433,21$
$k = 7$		

Ejemplo 7.- Calcule la quinta cuota capital de un préstamo que se reembolsa con 8 cuotas constantes de S/. 1 610,36 cada fin de trimestre. La TET es del 6%.

Solución

$$\begin{aligned}
 A_5 &= ? & A_k &= R (1 + i)^{k-1-n} \\
 R &= 1\,610,36 & A_5 &= 1\,610,36 \times 1,06^{5-1-8} \\
 n &= 8 \text{ trim.} & A_5 &= 1\,610,36 \times 1,06^{-4} \\
 i &= 0,06 & A_5 &= 1\,275,56 \\
 k &= 5
 \end{aligned}$$

Ejemplo 8.- Calcule la sexta cuota capital de un préstamo que se reembolsará con ocho cuotas constantes trimestrales vencidas de S/. 1 610,36 y a una TET del 6%.

Solución

$$\begin{aligned}
 A_6 &= ? & A_k &= R (1 + i)^{k-1-n} \\
 k &= 6 & A_6 &= 1\,610,36 \times 1,06^{6-1-8} \\
 n &= 8 & A_6 &= 1\,610,36 \times 1,06^{-3} \\
 R &= 1\,610,36 & A_6 &= 1\,352,09 \\
 i &= 0,06
 \end{aligned}$$

Ejemplo 9.- Calcule la cuota constante de un préstamo que se reembolsará con ocho cuotas al final de cada trimestre con una TET del 6%, cuya sexta cuota capital es de S/. 1 352,09.

Solución

$$\begin{aligned}
 R &= ? & A_k &= R (1 + i)^{k-1-n} \\
 n &= 8 & 1\,352,09 &= R \times 1,06^{6-1-8} \\
 i &= 0,06 & 1\,352,09 &= R \times 1,06^{-3} \\
 A_6 &= 1\,352,09 & 1\,352,09 &= 0,7920936632R \\
 k &= 6 & R &= 1\,610,36
 \end{aligned}$$

3.5.2 Cuota capital en función del préstamo

La fórmula (97) puede ser expresada en función del préstamo reemplazando R por su equivalente $P \cdot \text{FRC}_{i,n}$.

$$A_k = P \cdot \text{FRC}_{i,n} (1 + i)^{k-1-n} \quad (98)$$

Ejemplo 10.- Calcule la quinta cuota capital de un préstamo de S/. 10 000 contratado a una TET del 6% amortizable en 8 cuotas trimestrales constantes vencidas.

Solución

$$A_5 = ?$$

$$P = 10\,000$$

$$i = 0,06$$

$$k = 5$$

$$n = 8$$

$$A_k = P \cdot \text{FRC}_{i;n} (1+i)^{k-1-n}$$

$$A_5 = 10\,000 \cdot \text{FRC}_{0,06;8} \times 1,06^{6-1-8}$$

$$A_5 = 10\,000 \times 0,1610359426 \times 1,06^{-4}$$

$$A_5 = 1\,275,56$$

3.5.3 Cuota capital en función de la primera cuota capital

De la fórmula (97) obtenemos:

$$A_1 = R (1+i)^{-n} = A_1 (1+i)^0$$

$$A_2 = R (1+i)^{-n+1} = A_1 (1+i)^1$$

$$A_3 = R (1+i)^{-n+2} = A_1 (1+i)^2$$

$$A_4 = R (1+i)^{-n+3} = A_1 (1+i)^3$$

$$A_k = R (1+i)^{k-1-n} = A_1 (1+i)^{k-1}$$

$$A_k = A_1 (1+i)^{k-1} \quad (99)$$

Ejemplo 11.- La primera cuota capital de un préstamo a ser reembolsado en 8 cuotas constantes uniformes trimestrales vencidas a una TET del 6% es de S/. 1 010,36. Calcule la cuota capital de la séptima cuota.

Solución

$$A_7 = ?$$

$$A_1 = 1\,010,36$$

$$i = 0,06$$

$$k = 7$$

$$A_k = A_1 (1+i)^{k-1}$$

$$A_7 = 1\,010,36 \times 1,06^{7-1}$$

$$A_7 = 1\,433,21$$

3.6 Cálculo de la cuota interés en cualquier cuota constante

La cuota de interés I_k de una cuota constante puede calcularse en función de:

- La renta o cuota constante
- El importe del préstamo

3.6.1 Cuota interés en función de la cuota constante

$$\begin{aligned} R &= A_k + I_k \\ I_k &= R - A_k \text{ pero } A_k = R (1 + i)^{k-1-n} \quad (97) \\ I_k &= R - R (1 + i)^{k-1-n} \end{aligned}$$

$$I_k = R [1 - (1 + i)^{k-1-n}] \quad (100)$$

Ejemplo 12.- Calcule el importe de la cuota interés de la séptima cuota de un préstamo reembolsable en ocho cuotas constantes trimestrales vencidas de S/. 1 610,36 a una TET del 6%.

Solución

$$\begin{aligned} I_7 &= ? \\ n &= 8 \\ R &= 1\,610,36 \\ i &= 0,06 \\ k &= 7 \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_k &= R [1 - (1 + i)^{k-1-n}] \\ I_7 &= 1\,610,36 [1 - 1,06^{7-1-8}] \\ I_7 &= 177,15 \end{aligned}$$

3.6.2 Cuota interés en función del préstamo

$$\begin{aligned} I_k &= R [1 - (1 + i)^{k-1-n}] \text{ pero } R = P \cdot \text{FRC}_{i;n} \\ I_k &= P \cdot \text{FRC}_{i;n} [1 - (1 + i)^{k-1-n}] \end{aligned}$$

$$I_k = P \cdot \text{FRC}_{i;n} [1 - (1 + i)^{k-1-n}] \quad (101)$$

Ejemplo 13.- Calcule la cuota interés de la quinta cuota de un préstamo de S/. 10 000 contratado a una TET del 6% amortizable en 8 cuotas trimestrales constantes vencidas.

Solución

$$\begin{aligned} I_5 &= ? \\ P &= 10\,000 \\ i &= 0,06 \\ n &= 8 \\ k &= 5 \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_k &= P \cdot \text{FRC}_{i;n} [1 - (1 + i)^{k-1-n}] \\ I_5 &= 10\,000 \text{ FRC}_{0,06;8} [1 - 1,06^{5-1-8}] \\ I_5 &= 10\,000 \times 0,1610359426 \times 0,2079063368 \\ I_5 &= 334,80 \end{aligned}$$

3.7 Cálculo de la deuda extinguida en cualquier cuota

La deuda extinguida E_k de una deuda que genera intereses y se reembolsa en cuotas uniformes corresponde a la sumatoria de las amortizaciones o *cuotas capitales* vencidas, independientemente que hayan sido canceladas o no. La deuda extinguida no pagada genera diariamente el interés compensatorio pactado más los intereses moratorios de ley. En cualquier momento, un préstamo que se reembolsa en cuotas es igual a la sumatoria de la deuda extinguida más la deuda residual o saldo insoluto:

$\text{PRÉSTAMO} = \text{DEUDA EXTINGUIDA} + \text{DEUDA RESIDUAL}$

La deuda extinguida E_k en cualquier cuota, puede hallarse en función de:

- a) La primera cuota capital A_1
- b) La renta R
- c) El préstamo P

3.7.1 Deuda extinguida en función de A_1

$$E_k = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k$$

Reemplazando las amortizaciones de cada cuota por sus equivalentes en función de A_1

$$E_k = A_1 + A_1 (1+i) + A_1 (1+i)^2 + A_1 (1+i)^3 + \dots + A_1 (1+i)^{k-1}$$

$$E_k = A_1 [1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{k-1}]$$

Como el término entre corchetes es el FCS, tenemos:

$E_k = A_1 \cdot \text{FCS}_{i;k} \quad (102)$
--

Ejemplo 14.- Calcule la deuda extinguida al final de la tercera cuota en un préstamo contratado a una TET del 6% amortizable en 8 cuotas trimestrales constantes vencidas, cuya primera cuota capital fue de S/. 1 010,36.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 E_k = ? & E_k = A_1 \cdot FCS_{i;k} \\
 i = 0,06 & E_3 = 1\,010,36 \cdot FCS_{0,06;3} \\
 A_1 = 1\,010,36 & E_3 = 1\,010,36 \times 3,1836 \\
 k = 3 & E_3 = 3\,216,58
 \end{array}$$

3.7.2 Deuda extinguida en función de R

Reemplazando en (102) A_1 por su equivalente $R (1 + i)^{-n}$

$$E_k = R(1 + i)^{-n} FCS_{i;k} \quad (103)$$

Ejemplo 15.- Calcule la deuda extinguida al final de la tercera cuota en un préstamo contratado a una TET del 6% amortizable en 8 cuotas trimestrales uniformes vencidas de S/. 1 610,36.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 E_k = ? & E_k = R (1 + i)^{-n} FCS_{i;k} \\
 i = 0,06 & E_3 = 1\,610,36 \times 1,06^{-8} FCS_{0,06;3} \\
 n = 8 & E_3 = 1\,610,36 \times 0,6274123713 \times 3,1836 \\
 R = 1\,610,36 & E_3 = 3\,216,58 \\
 k = 3 &
 \end{array}$$

3.7.3 Deuda extinguida en función P

Reemplazando en (103) R por su equivalente $P \cdot FRC_{i;n}$

$$E_k = P \cdot FRC_{i;n} (1 + i)^{-n} FCS_{i;k}$$

$$E_k = P \left[\frac{i (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right] (1 + i)^{-n} \left[\frac{(1 + i)^k - 1}{i} \right]$$

$$E_k = P \left[\frac{(1 + i)^k - 1}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (104)$$

Ejemplo 16.- Calcule la deuda extinguida al final de la tercera cuota en un préstamo de S/. 10 000 contratado a una TET del 6% amortizable en 8 cuotas trimestrales uniformes vencidas.

Solución

$E_k = ?$
 $P = 10\ 000$
 $i = 0,06$
 $n = 8$
 $k = 3$

$$E_3 = P \left[\frac{(1 + i)^k - 1}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

$$E_3 = 10\ 000 \left[\frac{(1 + 0,06)^3 - 1}{(1 + 0,06)^8 - 1} \right]$$

$$E_3 = 10\ 000 \times 0,3216580268$$

$$E_3 = 3\ 216,58$$

3.8 Cálculo de la deuda residual en cualquier fecha

En cualquier fecha la deuda residual D_k o saldo insoluto de un préstamo que se reembolsa con cuotas constantes está constituida por la sumatoria de las cuotas capitales por devengar, excluyendo la que haya vencido en la fecha de la evaluación (este importe no es insoluto sino vencido). Por ejemplo, el saldo insoluto al vencimiento de la quinta cuota de un crédito contratado a ser reembolsado en 8 cuotas constantes, estará compuesto por las 3 cuotas pendientes de vencer descontadas 3 períodos con la tasa de interés del préstamo, lo que es equivalente a la sumatoria de las cuotas capitales por devengar.

3.8.1 Deuda residual en función de R

La deuda residual D_k -donde k representa los períodos de tiempo uniformes transcurridos hasta la fecha de evaluación- de un préstamo que se amortiza en n cuotas constantes se calcula actualizando el importe de las cuotas por devengar:

$$D_k = R (1 + i)^{-1} + R (1 + i)^{-2} + R (1 + i)^{-3} + \dots + R (1 + i)^{-(n-k)}$$

$$D_k = R [(1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + (1 + i)^{-3} + \dots + (1 + i)^{-(n-k)}]$$

Como el término entre corchetes es el $FAS_{i; n-k}$ tenemos:

$$D_k = R \left[\frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i(1+i)^{n-k}} \right] \quad (105)$$

$$D_k = R \cdot FAS_{i; n-k} \quad (105')$$

Ejemplo 17.- Calcule la deuda residual al vencimiento de la novena cuota, de un préstamo de S/. 8 000 amortizable en 12 cuotas constantes mensuales vencidas de S/. 803,70 con una TEM del 3%.

Solución

$D_k = ?$	$D_k = R \cdot FAS_{i; n-k}$
$k = 9$	$D_k = 803,70 \cdot FAS_{0,03; 12-9}$
$P = 8\,000$	$D_k = 803,70 \times 2,828611355$
$n = 12$	$D_k = 2\,273,35$
$R = 803,70$	
$i = 0,03$	

3.8.2 Deuda residual en función de P

La deuda residual en función de P se puede obtener relacionando (65) y (105')

$$(65) \quad R = P \cdot FRC_{i; n}$$

$$(105') \quad D_k = R \cdot FAS_{i; n-k}$$

Si en (105') reemplazamos R por su equivalente desarrollado en (65) tenemos:

$$D_k = P \cdot FRC_{i; n} \cdot FAS_{i; n-k}$$

cuya expresión matemática es:

$$D_k = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \left[\frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i(1+i)^{n-k}} \right] \quad (106)$$

$$D_k = P \cdot \text{FRC}_{i,n} \cdot \text{FAS}_{i,n-k} \quad (106')$$

Ejemplo 18.- Calcule el importe a cancelar por una empresa que ha sido autorizada para liquidar un préstamo de S/. 8 000 faltando tres cuotas para su vencimiento. La deuda fue contraída para ser amortizada en 12 cuotas uniformes mensuales a una TEM del 3%.

Solución

$$D_k = ?$$

$$P = 8\,000$$

$$k = 9$$

$$n = 12$$

$$i = 0,03$$

$$D_k = P \cdot \text{FRC}_{0,03,12} \cdot \text{FAS}_{0,03,12-k}$$

$$D_k = 8\,000 \cdot \text{FRC}_{0,03,12} \cdot \text{FAS}_{0,03,(12-9)}$$

$$D_k = 8\,000 \times 0,104423855 \times 2,828611355$$

$$D_k = 2\,273,35$$

3.9 Cálculo para hallar n

Cuando se dispone de una determinada renta y se conoce el importe del financiamiento requerido y su respectivo costo, puede calcularse el número de cuotas constantes necesarias para reembolsar completamente el crédito. Si al aplicar la fórmula (67) se obtiene que n es un número entero, n indicará el número de cuotas uniformes para reembolsar un préstamo. En caso contrario, es decir cuando n no es entero, para la obtención del número de cuotas y el momento en el que se cancela la última cuota se utilizan diversas fórmulas matemáticas.

Ejemplo 19.- Una empresa requiere un capital de S 10 000 para ampliar su planta de procesos químicos. El estudio de factibilidad indica que el proyecto puede generar excedentes trimestrales de S 1 500 aplicables a reembolsar el préstamo. Si el financiamiento tiene un costo efectivo trimestral del 5%, ¿en cuánto tiempo podrá amortizarse?

Solución

$$n = ?$$

$$P = 10\,000$$

$$R = 1\,500$$

$$i = 0,05$$

$$n = - \frac{\text{Log}\left[1 - \frac{Pi}{R}\right]}{\text{Log}(1 + i)}$$

$$n = - \frac{\text{Log}\left[1 - \frac{10\,000 \times 0,05}{1\,500}\right]}{\text{Log}(1 + 0,05)} = 8,31038622$$

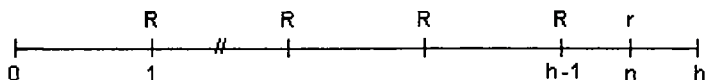
La obtención de un n no entero implica los siguientes problemas:

- Conocer el importe de la última renta r correspondiente al momento n .
- Si se decide cancelar el préstamo en el momento h o en el momento $h - 1$, conocer el importe de la cuota en ese momento. En el primer caso la cuota será mayor a las anteriores y en el segundo caso será menor a las anteriores.

3.10 Importe de la última renta cuando n es no entero

El valor obtenido con la fórmula (67), puede resultar un número no entero, como en el ejemplo anterior, donde $n = 8,31038622$, ello indica que el plazo del préstamo es de 8,31 trimestres equivalentes aproximadamente a dos años con 28 días.

En forma general, el diagrama de flujo de caja de una anualidad con $h - 1$ rentas uniformes iguales a R y una renta de menor importe r , a pagar en el momento n , es el siguiente:



donde:

$$h - 1 < n < h.$$

n = número no entero de períodos de renta calculado con la fórmula (67)

h = mínimo entero mayor que n

$h - 1$ = máximo entero menor que n

r = renta que se debería pagar en el momento n .

$$r < R$$

Cálculo de la renta r en el momento n

El importe de la última renta en el momento n se calcula con la ecuación que se obtiene a continuación:

$$P = R \cdot FAS_{i; h-1} + r (1+i)^{-n}$$

$$r (1+i)^{-n} = P - R \cdot FAS_{i; h-1}$$

$$r = (1+i)^n [P - R \cdot FAS_{i; h-1}]$$

$$r = FSC_{i; n} [P - R \cdot FAS_{i; h-1}] \quad (107)$$

Ejemplo 20.- En el ejemplo 19 el capital de \$ 10 000 puede financiarse con 8,3104 cuotas constantes trimestrales de \$ 1 500 c/u a una TET del 5%. ¿Cuál será el importe del noveno pago con vencimiento en el 8,31 trimestre?

Solución

$r = ?$	$r = FSC_{i; n} [P - R \cdot FAS_{i; h-1}]$
$i = 0,05$	$r = (1 + 0,05)^{8,31038622} [(10\ 000 - 1\ 500 FAS_{0,05,8})]$
$P = 10\ 000$	$r = 1,5 [10\ 000 - 9\ 694,82]$
$n = 8,3104$	$r = 457,77$
$h-1 = 8$	
$R = 1\ 500$	

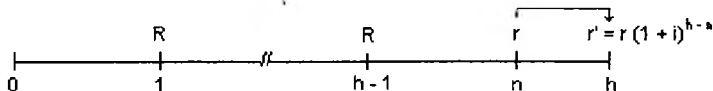
El capital será reembolsado con 8 cuotas uniformes trimestrales de \$ 1 500 y una novena cuota de \$ 457,77 que se deberá pagar 28 días después de la octava cuota.

La verificación del valor presente se efectúa con la siguiente ecuación:

$$P = 1\ 500 \cdot FAS_{0,05,8} + 457,77(1 + 0,05)^{-8,31038622} = 10\ 000$$

Importe de la última renta r' en el momento h

Si se desea cancelar el préstamo en el momento h , (con un número entero de rentas redondeando n por exceso al entero superior), debemos llevar r del momento n hacia el momento h .



n es número no entero

Denotando r' a la renta en el momento h , tenemos:

$$r' = r (1 + i)^{h-n}$$

pero $r = (1 + i)^n [P - R \cdot \text{FAS}_{i; h-1}]$ entonces:

$$r' = (1 + i)^n [P - R \cdot \text{FAS}_{i; h-1}] (1 + i)^{h-n}$$

$$r' = (1 + i)^h [P - R \cdot \text{FAS}_{i; h-1}]$$

$$r' = \text{FSC}_{i; h} [P - R \cdot \text{FAS}_{i; h-1}] \quad (108)$$

Ejemplo 21.- En el ejemplo 19 el capital de \$ 10 000 puede quedar totalmente amortizado con 8 cuotas uniformes de \$ 1 500, y la última cuota al final del noveno trimestre a la TET del 5% puede calcularse aplicando la fórmula (108).

Solución

$$r' = ?$$

$$i = 0,05$$

$$P = 10\,000$$

$$n = 8,3104$$

$$h = 9$$

$$h-1 = 8$$

$$R = 1\,500$$

$$r' = \text{FSC}_{i; h} [P - R \cdot \text{FAS}_{i; h-1}]$$

$$r = (1 + 0,05)^9 [(10\,000 - 1\,500 \text{FAS}_{0,05,8})]$$

$$r = 1,551328216 [10\,000 - 9\,694,82]$$

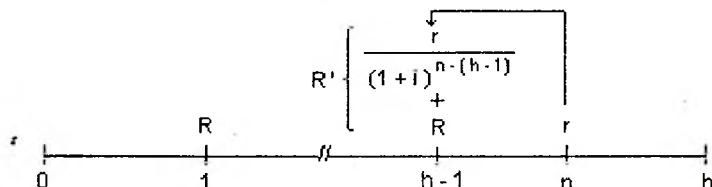
$$r = 473,44$$

La verificación del valor presente se efectúa con la siguiente ecuación:

$$P = 1\,500 \cdot \text{FAS}_{0,05,8} + 473,44(1 + 0,05)^{-9} = 10\,000$$

Importe de la última renta R' en el momento $h - 1$

Si se desea cancelar el préstamo, en el momento $h - 1$, con un número entero de rentas redondeando n por defecto al entero inferior, debemos traer r del momento n hacia el momento $h - 1$ y sumarle el pago R .



Traemos r del momento n al momento $h - 1$ y le sumamos el pago R para obtener la renta ubicada en el momento $h - 1$, que denotaremos R' :

$$R' = \frac{r}{(1+i)^{n-(h-1)}} + R$$

$$R' = r(1+i)^{h-1-n} + R$$

pero $r = (1+i)^n [P - R \cdot \text{FAS}_{i;h-1}]$ entonces:

$$R' = (1+i)^n [P - R \cdot \text{FAS}_{i;h-1}] (1+i)^{h-1-n} + R$$

$$R' = (1+i)^{h-1} [P - R \cdot \text{FAS}_{i;h-1}] + R$$

$$R' = R + \text{FSC}_{i;h-1} [P - R \cdot \text{FAS}_{i;h-1}] \quad (109)$$

Ejemplo 22.- En el ejemplo 19 el capital de \$ 10 000 puede quedar totalmente amortizado con 7 cuotas uniformes de \$ 1 500, y la última cuota al final del octavo trimestre a la TET del 5% puede calcularse aplicando la fórmula (109).

Solución

$$R' = ?$$

$$i = 0,05$$

$$R = 1\,500$$

$$R' = R + \text{FSC}_{i;h-1} [P - R \cdot \text{FAS}_{i;h-1}]$$

$$R' = 1\,500 + (1 + 0,05)^8 [(10\,000 - 1\,500 \text{FAS}_{0,05,8})]$$

$$R' = 1\,500 + 1,477455444 [10\,000 - 9\,694,82]$$

$$\begin{aligned}h - 1 &= 8 & R' &= 1\,500 + 450,89 \\ P &= 10\,000 & R' &= 1\,950,89\end{aligned}$$

El capital será reembolsado con 7 cuotas uniformes trimestrales de \$ 1 500 y una octava cuota de \$ 1 950,89.

La verificación del valor presente se efectúa con la siguiente ecuación:

$$P = 1\,500 \text{ FAS}_{0,05; 7} + 1\,950,89(1 + 0,05)^{-8} = 10\,000$$

3.11 Cálculo para hallar la tasa de interés

Cuando un préstamo u operación similar es otorgado para ser reembolsado con un determinado número de cuotas constantes en un horizonte temporal previamente establecido, pero sin indicar expresamente la tasa de interés cargada, entonces ésta puede hallarse según lo explicado en el punto 5 del capítulo VI y 5 del capítulo XIII, utilizando el procedimiento de prueba y error.

Ejemplo 23.- En la Feria del Hogar una máquina-herramienta es ofertada al contado en \$ 3 000 y al crédito se ofrece con una cuota inicial de \$ 2 000 y 10 pagos de \$ 120 cada fin de mes. ¿Qué TEA se está cargando en el financiamiento?

Solución

$$\begin{aligned}i &= ? & R &= P \cdot \text{FRC}_{i; n} \\ P &= 1\,000 & 120 &= 1\,000 \text{ FRC}_{i; 10} \\ R &= 120 \\ n &= 10\end{aligned}$$

Tanteando y dando valores a i en el FRC tenemos:

TEM = i	3,00%	3,460154%	4,00%
1 000. $\text{FRC}_{i; 10}$	117,23	120,00	123,29

Interpolando se ha encontrado que la TEM cargada al financiamiento es del 3,46% en consecuencia la TEA es del 50,41%.

4. Cuotas constantes en períodos variables

Cuando un préstamo debe reembolsarse con cuotas constantes que vencen en períodos variables de tiempo, entonces esas rentas no constituyen una anualidad, porque los períodos de pago no son uniformes. Sin embargo, en estos casos, también es posible obtener rentas constantes en períodos variables. El procedimiento a seguir, considerando el importe de cada cuota como una unidad monetaria, consiste en:

- Fijar las fechas de vencimiento de cada cuota y establecer los días que median entre los vencimientos de cada una de ellas.
- Traer cada cuota ubicada en la fecha de su vencimiento, hacia el momento 0, utilizando el FSA con su tasa efectiva periódica.
- La suma de los importes de cada cuota traída al presente, constituye el FAS de la serie con rentas de período variable cuyo recíproco es el FRC.
- Obtenido el FRC, éste se multiplica por el importe del préstamo para hallar la cuota constante.

El procedimiento descrito también puede ser realizado con interés simple, pero no es consistente matemáticamente, por cuanto no asegura el cumplimiento de la tasa anunciada. La consistencia del procedimiento puede realizarse comprobando que el valor presente de las cuotas sea igual al importe del préstamo.

Ejemplo 24.- Calcule la cuota fija y prepare la tabla referencial de reembolso para un préstamo de S/. 10 000 desembolsado el 16 de agosto, reembolsable en cuatro cuotas uniformes con vencimiento cada trimestre calendario (el 16 de cada trimestre), a una TET del 5%.

Solución

a) Cálculo de los períodos de tiempo de cada cuota

Detalle	Fecha	Días	Acum.	n
Desembolso	Ago. 16	0	0	0
1° Vencimiento	Nov. 16	92	92	1
2° Vencimiento	Feb. 16	92	184	2
3° Vencimiento	May. 16	89	273	3
4° Vencimiento	Ago. 16	92	365	4

b) Actualización de las cuotas de importe s/. 1,00

$$FAS = 1,05^{-(92/90)} + 1,05^{-(184/90)} + 1,05^{-(273/90)} + 1,05^{-(365/90)}$$

$$FAS = 3,539323029$$

c) Obtención del FRC

$$FRC = 1/FAS$$

$$FRC = 1/3,539323029$$

$$FRC = 0,2825399072$$

d) Cálculo de la cuota fija para períodos de tiempo variables

$$R = P \cdot FRC$$

$$R = 10\,000 \times 0,2825399072$$

$$R = 2\,825,40$$

Tabla de reembolso

Fecha	Días	n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
Ago. 16		0				10 000,00
Nov. 16	92	1	2 825,40	511,39	2 314,01	7 685,99
Feb. 16	92	2	2 825,40	393,05	2 432,34	5 253,65
May 16	89	3	2 825,40	259,69	2 565,71	2 687,94
Ago. 16	92	4	2 825,40	137,46	2 687,94	0,00
	365		11 301,60	1 301,60	10 000,00	

El interés de cada cuota corresponde al número de días de cada período de renta. Por ejemplo, la primera cuota vence a los 92 días, entonces su interés es:

$$I = 10\,000 [1,05^{92/90} - 1] = 511,39.$$

5. Cuotas constantes anticipadas

Las cuotas constantes anticipadas en los sistemas de amortización de préstamos, dan como resultado que la entidad financiera efectúe un menor desembolso con relación al financiamiento efectivamente solicitado por el prestatario; ya que son coincidentes el desembolso y el vencimiento de la primera cuota; ambas efectuadas en el momento 0.

Es aplicable a las cuotas constantes anticipadas todo lo desarrollado para sus similares vencidas, teniendo cuidado de considerar a la cuota anticipada como una cuota vencida descontada durante un período. Esta equivalencia se ha dado en (68) y (69). El cálculo de la cuota constante anticipada se desarrolla aplicando (73) $Ra(1+i) = P \cdot FRC_{i;n}$.

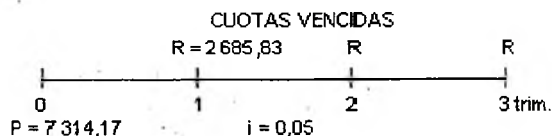
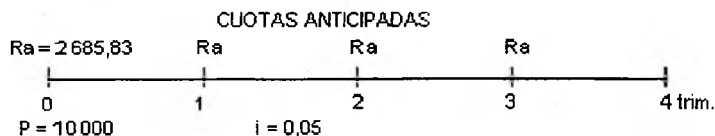
Ejemplo 25.- Prepare la tabla referencial de reembolso para un préstamo de S/. 10 000 otorgado el 16 de agosto, para amortizarse con cuatro cuotas uniformes trimestrales anticipadas, a una TET del 5%.

Solución

$$\begin{array}{ll}
 Ra = ? & Ra(1+i) = P \cdot FRC_{i;n} \\
 P = 10\,000 & R(1,05) = 10\,000 \cdot FRC_{0,05;4} \\
 n = 4 & R(1,05) = 10\,000 \times 0,2820118326 \\
 i = 0,05 & R = 2\,685,83
 \end{array}$$

Tabla de reembolso de un crédito con cuotas anticipadas

Fecha	Días	n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
Ago. 16	0	0				10 000,00
Ago. 16	0	0	2 685,83	0,00	2 685,83	7 314,17
Nov. 14	90	1	2 685,83	365,71	2 320,12	4 994,05
Feb. 12	90	2	2 685,83	249,70	2 436,12	2 557,93
May. 13	90	3	2 685,83	127,90	2 557,93	0,00
	540		10 743,31	743,31	10 000,00	



El financiamiento bruto de S/. 10 000 se ha convertido en un financiamiento neto de S/. 7 314,17 por la deducción de la primera cuota fija anticipada. La primera cuota ha sido aplicada totalmente como amortización, porque en el momento 0 no ha transcurrido tiempo alguno, por lo tanto el saldo deudor no ha podido generar interés.

Puede observarse que el préstamo de S/. 10 000 reembolsable en 4 cuotas constantes anticipadas de S/. 2 685,83 equivale a un préstamo de S/. 7 314,17 reembolsable en 3 cuotas constantes vencidas del mismo importe anterior.

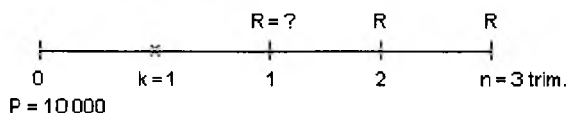
6. Cuotas constantes diferidas

En este sistema el cliente no paga interés ni capital durante los períodos diferidos, capitalizándose el interés al préstamo al vencimiento de cada cuota diferida. Al término de los períodos diferidos el principal capitalizado servirá como base para calcular la cuota fija, considerando sólo el número de cuotas insolutas que restan en el horizonte temporal pactado.

Las cuotas diferidas vencidas y anticipadas se calculan aplicando (78) $R = P(1 + i)^k \text{FRC}_{i;n}$ y (79) $R_a = P(1 + i)^{k-1} \text{FRC}_{i;n}$ respectivamente.

Ejemplo 26.- Prepare la tabla referencial de reembolso para un préstamo de S/. 10 000 reembolsable con cuatro cuotas constantes pagaderas cada fin de trimestre. Considere un período diferido y una TET del 5%.

Solución



$$R = ?$$

$$P = 10\,000$$

$$k = 1$$

$$n = 3$$

$$i = 0,05$$

$$R = P (1 + i)^k \text{FRC}_{i,n}$$

$$R = 10\,000 (1,05^1) \text{FRC}_{0,05,3}$$

$$R = 10\,000 \times 1,05 \times 0,3672085646$$

$$R = 3\,855,69$$

Tabla de reembolso: cuotas diferidas

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo	Int. capital.
0				10 000,00	
1		0,00	0,00	10 500,00	500
2	3 855,69	525,00	3 330,69	7 169,31	
3	3 855,69	358,47	3 497,22	3 672,09	
4	3 855,69	183,60	3 672,09	0,00	
	11 567,07	1 067,07	10 500,00		500

Al vencimiento de la cuota diferida los intereses se han capitalizado al préstamo original, el mismo que se empieza a amortizar a partir del segundo periodo. El importe amortizado de S/. 10 500 no corresponde al préstamo solicitado sino al importe capitalizado durante las cuotas diferidas.

7. Amortizaciones constantes

Se obtiene la amortización constante dividiendo la deuda original entre el número de cuotas pactadas para su reembolso. La amortización constante origina en cada cuota un interés y cuotas decrecientes en progresión aritmética.

Ejemplo 27.- Prepare la tabla referencial de reembolso de un préstamo de S/. 10 000 otorgado el 8 de marzo, el mismo que debe ser reembolsado en 6 cuotas trimestrales vencidas con amortizaciones constantes a una TET del 5%. Grafique el comportamiento de la amortización e interés de cada cuota.

Solución

a) Cálculo de la amortización constante:

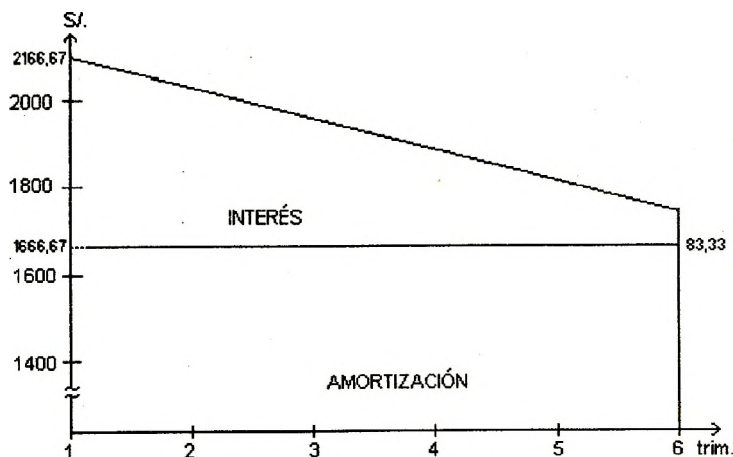
$$\text{Amortización constante} = \frac{\text{Préstamo}}{\text{Número de cuotas}}$$

$$\text{Amortización constante} = \frac{10\,000}{6} = 1\,666,67$$

Tabla referencial de reembolso: amortización constante

Fecha	Días	n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
Mar. 08		0				10 000,00
Jun. 06	90	1	2 166,67	500,00	1 666,67	8 333,33
Set. 04	90	2	2 083,33	416,67	1 666,67	6 666,67
Dic. 03	90	3	2 000,00	333,33	1 666,67	5 000,00
Mar. 03	90	4	1 916,67	250,00	1 666,67	3 333,33
Jun. 01	90	5	1 833,33	166,67	1 666,67	1 666,67
Ago. 30	90	6	1 750,00	83,33	1 666,67	0,00
	540		11 750,00	1 750,00	10 000,00	

Gráfico de las cuotas con amortización constante



En la tabla referencial de reembolso se observa que:

- las amortizaciones son constantes,
- los intereses y cuotas decrecen en progresión aritmética.

Las cuotas, intereses, amortizaciones y saldos de la tabla referencial de reembolso pueden referirse al número de cuota a las que pertenecen o a sus fechas de vencimiento. Si empleamos el número de cuota designaremos los componentes de la tabla:

Cálculos

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				P
1	$C_1 = I_1 + A_1$	$I_1 = P \cdot i$	$A_1 = P_0 / n$	$S_1 = P - A_1$
2	$C_2 = I_2 + A_2$	$I_2 = S_1 \cdot i$	$A_2 = P_0 / n$	$S_2 = S_1 - A_2$
:	:	:	:	:
n	$C_n = I_n + A_n$	$I_n = S_{n-1} \cdot i$	$A_n = P_0 / n$	$S_n = S_{n-1} - A_n$

8. Interés constante

En este sistema, conocido también como método inglés, los pagos al vencimiento de cada cuota incluyen sólo el interés devengado por el saldo insoluto, permaneciendo la deuda original sin variación hasta el vencimiento de la última cuota, la cual incluye además del interés generado en el último período, la devolución total del préstamo. Este sistema es usado generalmente cuando las empresas se financian con la emisión de bonos, pagando durante el plazo pactado sólo intereses y redimiendo el capital en la fecha del vencimiento de la obligación.

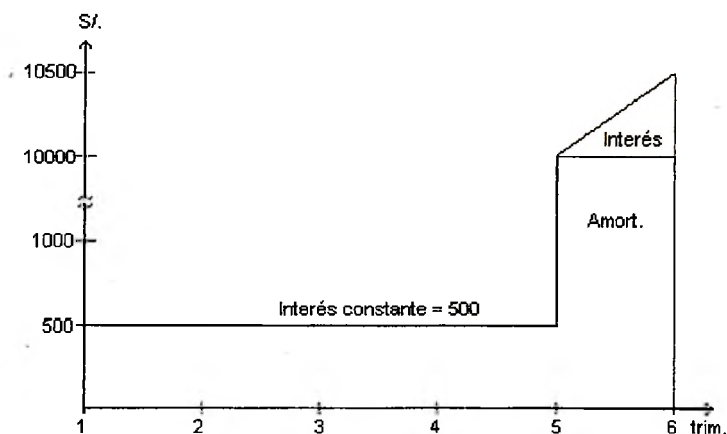
Ejemplo 28.- Prepare la tabla referencial de reembolso de un préstamo de S/. 10 000 otorgado el 8 de marzo, el mismo que debe ser reembolsado en 6 cuotas trimestrales vencidas a una TET del 5%. Las cuotas incluirán sólo el interés devengado, exceptuando la última cuota que, además, incluirá la devolución total del préstamo.

Solución

Tabla referencial de reembolso: interés constante

Fecha	Días	n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
Mar. 08		0				10 000,00
Jun. 06	90	1	500,00	500,00	0,00	10 000,00
Set. 04	90	2	500,00	500,00	0,00	10 000,00
Dic. 03	90	3	500,00	500,00	0,00	10 000,00
Mar. 03	90	4	500,00	500,00	0,00	10 000,00
Jun. 01	90	5	500,00	500,00	0,00	10 000,00
Ago. 30	90	6	10 500,00	500,00	10 000,00	0,00
	540		13 000,00	3 000,00	10 000,00	

Gráfico de las cuotas con interés constante



Cálculos

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				P
1	$C_1 = I_1$	$I_1 = P i$	$A_1 = 0$	P
2	$C_2 = I_2$	$I_2 = P i$	$A_2 = 0$	P
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$C_n = I_n$	$I_n = P i$	$A_n = P$	$P = P - A_n$

9. Cuotas crecientes aritméticamente

Para el cálculo de la cuota base C de un sistema de préstamo, cuyas cuotas experimentan un crecimiento aritmético previamente determinado, se actualizan tanto las C de la anualidad, como el importe de la sumatorias de los gradientes.

$$(63) \quad P_1 = C. \text{FAS} \quad \text{Valor presente de las cuotas base}$$

$$(91) \quad P_2 = G. \text{FASG} \quad \text{Valor presente de los gradientes}$$

donde el valor presente P de ambos flujos es igual a la suma de P_1 y P_2

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = C. \text{FAS} + G. \text{FASG}$$

Despejando C obtendremos:

$$C = [P - G. \text{FASG}] / \text{FAS}$$

$$C = [P - G. \text{FASG}_{i;n}] \text{FRC}_{i;n} \quad (110)$$

La fórmula (110) nos permite calcular la cuota base en un préstamo que se amortiza con cuotas crecientes aritméticamente.

Ejemplo 29.- Prepare la tabla referencial de reembolso de un préstamo de S/. 10 000 otorgado el 8 de marzo, el mismo que debe ser reembolsado en 6 cuotas trimestrales vencidas a una TET del 5%. Las cuotas tendrán un crecimiento arimético de S/. 200. Grafique el comportamiento de la amortización e interés de cada cuota.

Solución

$$C = ?$$

$$P = 10\,000$$

$$n = 6$$

$$i = 0,05$$

$$G = 200$$

$$C = [P - G. \text{FASG}_{i;n}] \text{FRC}_{i;n}$$

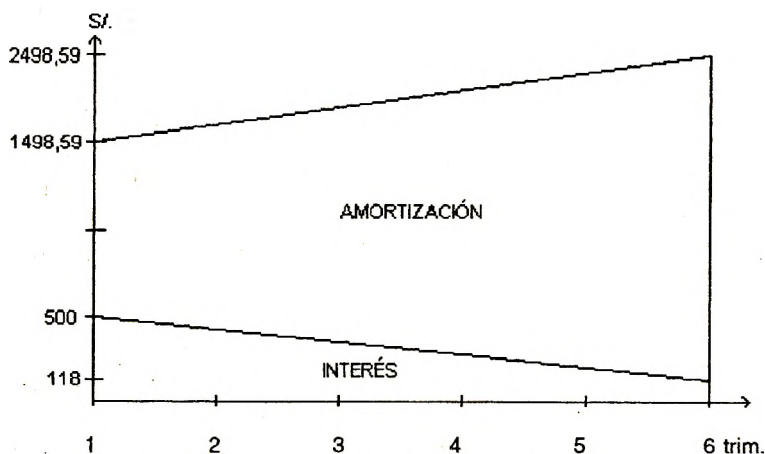
$$C = [10\,000 - \text{FASG}_{0,05;6}] \text{FRC}_{0,05;6}$$

$$C = [10\,000 - 200 \times 11,96799375] \times 0,1970174681$$

$$C = 1\,498,593916$$

Tabla referencial de reembolso: cuotas crecientes aritméticamente ($G = 200$)

Fecha	Días	n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
Mar. 08		0				10 000,00
Jun. 06	90	1	1 498,59	500,00	998,59	9 001,41
Set. 04	90	2	1 698,59	450,07	1 248,52	7 752,88
Dic. 03	90	3	1 898,59	387,64	1 510,95	6 241,93
Mar. 03	90	4	2 098,59	312,10	1 786,50	4 455,44
Jun. 01	90	5	2 298,59	222,77	2 075,82	2 379,61
Ago. 30	90	6	2 498,59	118,98	2 379,61	0,00
	540		11 991,56	1 991,56	10 000,00	

Gráfico de las cuotas crecientes aritméticamente

9.1 Cálculo del gradiente constante

Para el cálculo del gradiente constante despejamos G de (110).

$$\begin{aligned}
 C &= [P - G \cdot \text{FASG}] \cdot \text{FRC} \\
 C/\text{FRC} &= P - G \cdot \text{FASG} \\
 G \cdot \text{FASG} &= P - C/\text{FRC} \\
 G &= [P - C \cdot \text{FAS}]/\text{FASG}
 \end{aligned}$$

$$G = \frac{P - C.FAS_{i;n}}{FASG_{i;n}} \quad (111)$$

Ejemplo 30.- Un préstamo de S/. 10 000 se ha otorgado para ser reembolsado en 6 cuotas trimestrales vencidas con crecimiento aritmético, cuya cuota base será de S/. 1 498,59. Utilizando una TET del 5% calcule el importe del gradiente de crecimiento que asegure la amortización total del préstamo en el plazo pactado.

Solución

$$\begin{aligned} G &= ? & G &= [P - C.FAS_{i;n}] / FASG_{i;n} \\ P &= 10\,000 & G &= [10\,000 - 1\,498,59.FAS_{0,05;6}] / FASG_{0,05;6} \\ n &= 6 & G &= [10\,000 - 7\,606,38] / 11,96799375 \\ i &= 0,05 & G &= 200 \\ C &= 1\,498,59 \end{aligned}$$

9.2 Cálculo de G en una anualidad variable

En un préstamo que se otorga para ser reembolsado con un determinado número de cuotas crecientes aritméticamente en forma no convencional y cuyos incrementos deben efectuarse cada cierto número de rentas, G puede calcularse por equivalencia financiera con el siguiente procedimiento:

- Fijar la cuota base.
- Determinar la proporción de los incrementos a efectuar sobre la cuota base y las fechas en que se efectuarán.
- Establecer una ecuación de equivalencia financiera de tal manera de dejar G.

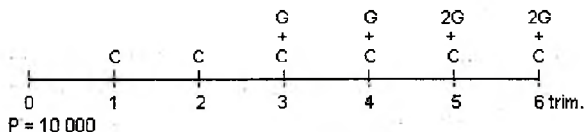
El proceso se explica con el desarrollo del siguiente ejemplo.

Ejemplo 31.- Un préstamo de S/. 10 000 se ha otorgado para ser reembolsado con 6 cuotas trimestrales vencidas crecientes aritméticamente cuya cuota base será de S/. 1 000. Los importes de las cuotas constantes serán:

- 1a. y 2a. el importe de la cuota base.
- 3a. y 4a. el importe de la cuota base más un gradiente aritmético.
- 5a. y 6a. el importe de la cuota base más dos gradientes aritméticos.

Calcule el importe del gradiente. La TET será del 5%.

Solución



$$G = ? \quad P = 10\,000 \quad n = 6 \quad i = 0,05 \quad C = 1\,000$$

Calculo del gradiente g

$$P = C \cdot FAS_{0,05;6} + G \cdot FAS_{0,05;2} \cdot FSA_{0,05;2} + 2G \cdot FAS_{0,05;2} \cdot FSA_{0,05;4}$$

$$P = C \cdot FAS_{0,05;6} + G[FAS_{0,05;2} \cdot FSA_{0,05;2} + 2FAS_{0,05;2} \cdot FSA_{0,05;4}]$$

$$10\,000 = 1\,000 \times 5,075692068 + G[1,686540073 + 3,059483126]$$

$$10\,000 = 5\,075,692068 + 4,746023199 G$$

$$4\,924,307232 = 4,746023199 G$$

$$G = 1\,037,565078$$

Crecimiento aritmético de las cuotas

Cuota	Cuota base	Gradiente	Total
1° y 2°	1 000	0,00	1 000,00
3° y 4°	1 000	1 037,57 x 1	2,037,57
5° y 6°	1 000	1,037,57 x 2	3 075,13

Tabla referencial de reembolso: cuotas crecientes aritméticamente

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				10 000,00
1	1 000,00	500,00	500,00	9 500,00
2	1 000,00	475,00	525,00	8 975,00
3	2 037,57	448,75	1 588,82	7 386,18
4	2 037,57	369,31	1 668,26	5 717,93
5	3 075,13	285,90	2 789,23	2 928,70
6	3 075,13	146,43	2 928,70	0,00
	12 225,39	2 225,39	10 000,00	

10. Cuotas crecientes geométricamente

En este sistema las cuotas experimentan en cada período, un crecimiento geométrico igual a una tasa (g) pactada previamente. El FRC que aplicado sobre el importe de un préstamo, obtiene la cuota base C que experimentará el crecimiento geométrico está dado por el término entre corchetes de la fórmula (112).

$$C = P \left[\frac{(i - g)(1 + i)^n}{(1 + i)^n - (1 + g)^n} \right] \quad (112)$$

Ejemplo 32.- Prepare la tabla de reembolso de un préstamo de S/. 10 000 otorgado para ser reembolsado en 6 cuotas trimestrales vencidas a una TET del 5% con un gradiente de crecimiento geométrico convencional del 3%.

Solución

$$\begin{aligned}
 C &= ? \\
 P &= 10\,000 \\
 n &= 6 \\
 i &= 0,05 \\
 g &= 0,03
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 C &= P \left[\frac{(i - g)(1 + i)^n}{(1 + i)^n - (1 + g)^n} \right] \\
 C &= 10\,000 \left[\frac{(0,05 - 0,03)(1 + 0,05)^6}{(1 + 0,05)^6 - (1 + 0,03)^6} \right] \\
 C &= 10\,000 \times 0,1835202618 \\
 C &= 1\,835,202618
 \end{aligned}$$

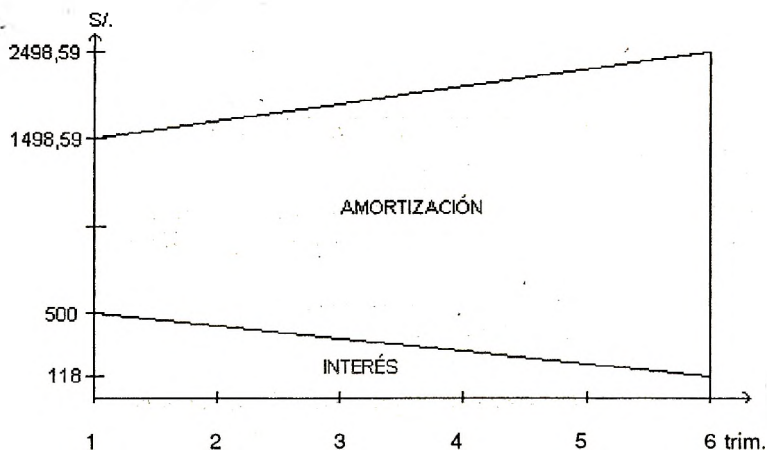
Crecimiento geométrico de las cuotas

Cuota	Importe	Gradiente	Total
1	1 835,20	$1,03^0$	1 835,20
2	1 835,20	$1,03^1$	1 890,26
3	1 835,20	$1,03^2$	1 946,97
4	1 835,20	$1,03^3$	2 005,38
5	1 835,20	$1,03^4$	2 065,54
6	1 835,20	$1,03^5$	2 127,50

Tabla referencial de reembolso: cuotas crecientes geométricamente

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				10 000,00
1	1 835,20	500,00	1 335,20	8 664,80
2	1 890,26	433,24	1 457,02	7 207,78
3	1 946,97	360,39	1 586,58	5 621,20
4	2 005,38	281,06	1 724,32	3 896,89
5	2 065,54	194,84	1 870,69	2 026,19
6	2 127,50	101,31	2 026,19	0,00
	11 870,84	1 870,84	10 000,00	

Gráfico de las cuotas crecientes geométricamente



11. Cuotas con amortizaciones crecientes periódicamente

Este sistema contempla el crecimiento de la amortización cada cierto número de cuotas, en proporciones cuya suma total debe ser el 100% del préstamo y con una periodicidad que guarda relación con los vencimientos de las cuotas. Por ejemplo, un crédito reembolsable en cuotas trimestrales puede ser

amortizado (de acuerdo con el número de cuotas que se haya pactado para su devolución), con las siguientes opciones:

Proporción del crecimiento de la amortización trimestral

Cuotas	2	4	6
1a. amortización	40%	10%	5%
2a. amortización	60%	20%	5%
3a. amortización		30%	15%
4a. amortización		40%	15%
5a. amortización			30%
6a. amortización			30%
Total	100%	100%	100%

Ejemplo 33.- Prepare la tabla de reembolso de un préstamo de S/. 10 000 otorgado para ser reembolsado con 6 cuotas trimestrales vencidas a una TET del 5%. La proporción del crecimiento de la amortización está dada en el cuadro anterior.

Tabla referencial de reembolso: amortizaciones crecientes

n	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0				10 000,00
1	1 000,00	500,00	500,00	9 500,00
2	975,00	475,00	500,00	9 000,00
3	1 950,00	450,00	1 500,00	7 500,00
4	1 875,00	375,00	1 500,00	6 000,00
5	3 300,00	300,00	3 000,00	3 000,00
6	3 150,00	150,00	3 000,00	0,00
	12 250,00	2 250,00	10 000,00	

Las amortizaciones están creciendo de acuerdo con la tabla de proporción de crecimiento de la amortización: las dos primeras cuotas, el 5% préstamo; las dos siguientes, el 15% del préstamo y las dos últimas el 30% del préstamo. El saldo insoluto está generando el interés del 5% trimestral y la cuota es igual a la suma de la amortización e interés.

12. Suma de números dígitos

En una tabla de reembolso un *número dígito* es el número de una cuota. Es decir, a la primera cuota le corresponde el dígito 1; a la segunda, el 2, etc. En un sistema que emplea la suma de números dígitos, se forma una razón para cada cuota, cuyo numerador es igual al número dígito de su respectiva cuota y el denominador es una cifra fija igual a la suma de los números dígitos del préstamo. La razón establecida en cada cuota multiplicada por el importe original del préstamo constituye la proporción de la amortización que se amortizará en cada cuota. El interés devengado por el saldo insoluto en cada período de renta y su amortización respectiva constituyen el importe de cada cuota del préstamo.

Ejemplo 34.- Aplicando la suma de números dígitos, prepare la tabla de reembolso de un préstamo de S/. 10 000 otorgado para ser reembolsado en 6 cuotas trimestrales vencidas. Utilice una TET del 5%.

Solución

Tabla referencial de reembolso: suma de números dígitos

n	Proporción	Cuota	Interés	Amort.	Saldo
0					10 000,00
1	1/21	976,19	500,00	476,19	9 523,81
2	2/21	1 428,57	476,19	952,38	8 571,43
3	3/21	1 857,14	428,57	1 428,57	7 142,86
4	4/21	2 261,90	357,14	1 904,76	5 238,10
5	5/21	2 642,86	261,90	2 380,95	2 857,14
6	6/21	3 000,00	142,86	2 857,14	0,00
21	1	12 166,67	2 166,67	10 000,00	

Las amortizaciones se han obtenido multiplicando el importe del préstamo por cada proporción de amortización:

$$A_1 = 10\,000 \times 1/21 = 476,19$$

$$A_2 = 10\,000 \times 2/21 = 952,38, \text{ etc.}$$

13. Sistema de reajuste de deuda

Un sistema de reajuste de deuda contempla la aplicación de dos tasas conjuntas a los saldos deudores de un préstamo: la primera es la tasa nominal del préstamo y la segunda constituye el reajuste de la deuda insoluta, que puede estar dado por la inflación, devaluación, índices de depreciación de activos fijos, índices sectoriales, etc. Denominando r a la tasa de reajuste, e i' a la tasa del préstamo, el costo efectivo i de un sistema de reajuste de deudas está dado por la acumulación de ambas tasas:

$$i = (1 + i') (1 + r) - 1$$

En el Perú, el Sistema de Reajuste de Deuda (SRD) tiene su origen legal en el art. 1235 del Código Civil el cual a la letra dice "No obstante lo establecido en el art. 1234, las partes pueden acordar que el monto de una deuda contraída en moneda nacional sea referido a índices de reajuste automático que fije el BCRP, a otras monedas o a mercancías, a fin de mantener dicho monto en valor constante. El pago de las deudas a que se refiere el párrafo anterior se efectuará en moneda nacional, en monto equivalente al valor de preferencia, al día de vencimiento de la obligación. Si el deudor retardara el pago, el acreedor puede exigir, a su elección, que la deuda sea pagada al valor de referencia al día del vencimiento de la obligación o al día en que se efectúe el pago".

En aplicación del artículo 8 de la ley 23327, del 24 de noviembre de 1981, el BCRP publica desde el 13 de julio de 1981 (Base = 100) el Índice de Reajuste de Deuda. Este Índice ha ido incrementándose hasta el 15 de setiembre de 1990, fecha en que alcanzó el valor 65 696.0 y a partir de la cual quedó congelado hasta el 1 de julio de 1991. En esta fecha, el BCRP, según circular 017-91-EF/91, dispuso "que la tasa efectiva máxima por todo concepto de las operaciones SRD dependerá del plazo del crédito y será calculado en forma tal que el rendimiento de estas operaciones incluido el reajuste sea equivalente a las operaciones no sujetas al SRD"; de este modo la vigencia del SRD ha sido desde el 13 de julio de 1981 hasta el 30 de junio de 1991.

La mecánica operativa para calcular las cuotas en un sistema de reajuste de deuda sujeto al cobro de una tasa efectiva máxima por todo concepto es la siguiente:

- Descomponer la tasa efectiva en una tasa nominal i' y una tasa de reajuste r .
- Reajustar los saldos insolutos con la tasa r .
- Sobre los saldos reajustados cobrar la tasa i' .
- La amortización al vencimiento de cada cuota se obtiene dividiendo el saldo reajustado entre el número de cuotas insolutas.
- La cuota total se compone en interés y amortización.

La preparación de una tabla referencial de reembolso con reajuste de deuda se explicará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 35.- Prepare la tabla referencial de reembolso de un préstamo de S/. 10 000 sujeto al sistema de reajuste de deuda. El préstamo debe ser reembolsado en 6 cuotas trimestrales vencidas con una TET del 5%, la cual incluye el 3% como tasa nominal del préstamo.

Solución

$$\begin{aligned}
 r &= ? & i &= (1 + i') (1 + r) - 1 \\
 P &= 10\,000 & 0,05 &= (1 + 0,03) (1 + r) - 1 \\
 n &= 6 & 1,05 &= 1,03 (1 + r) \\
 i &= 0,05 & 1,019417476 &= 1 + r \\
 i' &= 0,03 & r &= 0,019417476
 \end{aligned}$$

Tabla referencial de reembolso: Sistema de Reajuste de Deuda

n	Reajuste 0,01941747	Saldo reajustado	Interés 0,03	Amort.	Cuota	Saldo
0						10 000,00
1	194,17	10 194,17	305,83	1 699,02	2 004,85	8 495,15
2	164,95	8 660,10	259,80	1 732,02	1 991,82	6 928,08
3	134,53	7 062,61	211,88	1 765,65	1 977,53	5 296,95
4	102,85	5 399,81	161,99	1 799,94	1 961,93	3 599,87
5	69,90	3 669,77	110,09	1 834,89	1 944,98	1 834,89
6	35,63	1 870,52	56,12	1 870,52	1 926,63	0,00
			1 105,71	10 702,04	11 807,75	

Reajuste corresponde a la tasa r que se aplica sobre el **saldo**.

Saldo reajustado es la suma del saldo más el reajuste.

Interés	es la tasa i' aplicada sobre el saldo reajustado .
Amortización	es el cociente obtenido de la división del saldo reajustado entre el número de cuotas insolutas .
Cuota	es la suma del interés más la amortización .
Saldo	es la diferencia entre el saldo anterior y la amortización de la cuota.

14. Listado de fórmulas

Amortización en un sistema de cuotas constantes vencidas

$$A_k = R(1 + i)^{k-1-n} \quad (97) \quad \text{En función de } R$$

$$A_k = P.FRC_{i;n}(1 + i)^{k-1-n} \quad (98) \quad \text{En función de } P$$

$$A_k = A_1(1 + i)^{k-1} \quad (99) \quad \text{En función de } A_1$$

Interés en un sistema de cuotas constantes vencidas

$$I_k = R[1 - (1 + i)^{k-1-n}] \quad (100) \quad \text{En función de } R$$

$$I_k = P.FRC_{i;k}[1 - (1 + i)^{k-1-n}] \quad (101) \quad \text{En función de } P$$

Deuda extinguida en un sistema de cuotas constantes vencidas

$$E_k = A_1 FCS_{i;k} \quad (102) \quad \text{En función de } A_1$$

$$E_k = R(1 + i)^{-n} FCS_{i;k} \quad (103) \quad \text{En función de } R$$

$$E_k = P \left[\frac{(1 + i)^k - 1}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (104) \quad \text{En función de } P$$

Deuda residual en un sistema de cuotas constantes vencidas

$$D_k = R \left[\frac{(1 + i)^{n-k} - 1}{i(1 + i)^{n-k}} \right] \quad (105) \text{ En función de } R$$

$$D_k = R \cdot FAS_{i; n-k} \quad (105') \text{ En función de } R$$

$$D_k = P \left[\frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right] \left[\frac{(1 + i)^{n-k} - 1}{i(1 + i)^{n-k}} \right] \quad (106) \text{ En función de } P$$

$$D_k = P \cdot FRC_{i; n} FAS_{i; n-k} \quad (106') \text{ En función de } P$$

Última renta no uniforme en una anualidad con rentas constantes

$$r = FSC_{i;n} [P - R \cdot FAS_{i; h-1}] \quad (107) \text{ En el momento } n$$

$$r' = FSC_{i; h} [P - R \cdot FAS_{i; h-1}] \quad (108) \text{ En el momento } h$$

$$R' = R + FSC_{i; h-1} [P - R \cdot FAS_{i; h-1}] \quad (109) \text{ En el momento } h-1$$

Gradiente aritmético

$$C = [P - G \cdot FASG_{i;n}] FRC_{i;n} \quad (110) \text{ Cuota base}$$

$$G = \frac{P - C \cdot FAS_{i;n}}{FASG_{i;n}} \quad (111) \text{ Gradiente convencional}$$

Gradiente geométrico

$$C = P \left[\frac{(i - g)(1 + i)^n}{(1 + i)^n - (1 + g)^n} \right] \quad (112) \text{ Cuota base}$$

15. Problemas propuestos

Cuotas constantes vencidas

1. Prepare la tabla referencial de reembolso de un préstamo de S/. 5 000 desembolsado el 23 de agosto y amortizable en 6 cuotas constantes cada fin de bimestre. Utilice una TNM del 3%. Rp. $R = \text{S}/. 1\,016,81$.
2. Calcule la cuota constante y prepare la tabla referencial de reembolso de un préstamo de S/. 8 000 reembolsable en 8 cuotas con vencimiento cada 45 días. Utilice una TNA del 24% capitalizable mensualmente. Rp. $R = \text{S}/. 1\,140,37$.
3. Una empresa solicita a una entidad financiera un préstamo de S/. 20 000 para ser reembolsado en 2 años con una TEM del 2% y cuotas constantes trimestrales vencidas. La suma de las amortizaciones deben ser: en el primer año igual al 40% del préstamo y durante el segundo año igual al 60% del préstamo. Calcule el importe de las cuotas constantes durante el primer y segundo año. Rp. primer año: $R_1 = \text{S}/. 3\,049,62$; segundo año: $R_2 = \text{S}/. 3\,472,68$.

Cuota constante cuando el préstamo se desembolsa en partes

4. Calcule la cuota constante de un préstamo de S/. 6 000 reembolsable en 6 cuotas constantes mensuales vencidas con una TNA del 24% capitalizable mensualmente. El préstamo ha sido desembolsado de acuerdo al siguiente cronograma: 31 de agosto, S/. 1 000; 6 de setiembre, S/. 3 000; 22 de setiembre, S/. 2 000. Rp. $R = \text{S}/. 1\,063,89$.
5. Prepare la tabla referencial de reembolso de un préstamo de S/. 9 000 reembolsable en 6 cuotas constantes trimestrales vencidas con una TNA del 18% capitalizable bimestralmente. El cronograma de desembolsos es el siguiente: 24 de setiembre, S/. 4 000; 15 de noviembre, S/. 2 000; 20 de enero, S/. 3 000. Compruebe su respuesta efectuando su análisis a valor presente Rp. $R_1 = 1\,154,71$; $R_2 = 1\,829,36$; $P = \text{S}/. 8\,779,99$.

Cuota constante cuando existen variaciones de tasas

6. Un préstamo de S/. 7 000 fue otorgado por una institución financiera el día 14 de abril para ser amortizado en 4 cuotas constantes pagaderas cada fin de trimestre aplicando una TEA del 20%. En la fecha de

vencimiento de la primera cuota se conocen las variaciones de la TEA a partir de las siguientes fechas: 26 de abril, 19%; 26 de mayo, 21%; 13 de junio, 22%. Calcule el importe de las cuotas constantes. Rp. $R = S/. 1\,972,53$.

7. Un préstamo de S/. 5 000 otorgado a una TEA del 18% para ser amortizado en 8 cuotas constantes trimestrales vencidas, sufre una disminución de la TEA al 16% faltando 24 días para el vencimiento de la cuarta cuota. ¿Cuál será el importe de esa cuota a su vencimiento? Rp. $R_4 = S/. 742,57$.
8. Una maquinaria con un precio al contado de \$ 10 000 es vendida con una cuota inicial de \$ 2 000 y 10 cuotas mensuales constantes con vencimiento cada 30 días. El 3 de marzo, fecha en que se firmó el contrato de crédito, la TAMEX fue del 8% y posteriormente varió a partir del: 16 de mayo al 7,5%; 16 de agosto al 7%; 16 de octubre al 6,5% y 16 de diciembre al 6%. Prepare la tabla de reembolso definitiva.

Pagos en fechas anteriores al vencimiento de la cuota constante

9. Un préstamo de S/. 5 000 desembolsado el 23 de agosto debe ser amortizado en cuatro cuotas constantes cada 30 días pagando una TET del 8%. Calcule el importe del primer y segundo pago si el primero se efectúa el día 20 de setiembre y el segundo se efectúa exactamente el día de su vencimiento. Rp. $R_1 = S/. 1\,329,97$; $R_2 = S/. 1\,332,25$.
10. Una deuda de S/. 2 000 amortizable en 4 cuotas constantes con vencimiento cada 30 días a una TEM del 3% tuvo el siguiente cronograma de desembolsos: 20 de noviembre, S/. 500; 3 de diciembre, S/. 1 500. Si la TEM disminuyó al 2,5% el 1 de diciembre y el cliente cancela su primera cuota el 17 de diciembre, calcule el importe de la primera cuota y formule en esa fecha la nueva tabla de reembolso. Rp. $R_1 = S/. 526,33$; $R_2 = S/. 527,63$.

Pagos cuyos importes son mayores a la cuota constante

11. Una deuda de S/. 6 000 debe ser amortizada en 8 cuotas constantes trimestrales vencidas con una TEM del 2%. Formule la tabla de reembolso considerando que al vencimiento de la primera cuota el pago es de S/. 1 500. Rp. $R_1 = S/. 1\,500$; cuotas restantes 875,64.

12. Al vencimiento de la segunda cuota de un crédito bancario de S/. 5 000 otorgado para ser amortizado en 6 cuotas constantes trimestrales vencidas con una TEQ del 1% se cancela el importe de S/. 1 300. Considerando que el prestatario pagó oportunamente su primera cuota, calcule el importe de las cuotas por devengar. Rp. $R_1 = \text{S/. } 1\,021,67$; $R_2 = \text{S/. } 1\,300$; $R_3 = \text{S/. } 1\,004,56$; R_4 a $R_6 = \text{S/. } 1\,021,67$.

Cuota capital en función de la cuota constante

13. Calcule el importe de la sexta, séptima y octava cuota capital de un préstamo concedido a una TEA del 20% amortizable en 12 cuotas constantes trimestrales vencidas de S/. 1 106,94; dicha información es necesaria para la preparación de un flujo de caja. Rp. $A_6 = \text{S/. } 804,56$; $A_7 = \text{S/. } 842,08$; $A_8 = \text{S/. } 881,34$.
14. Un crédito debe ser amortizado en 24 cuotas constantes de S/. 492,82 cada 30 días aplicando una TEA del 18%. Calcule el importe de la cuota capital correspondiente a la décima cuota. Rp. $A_{10} = \text{S/. } 400,72$.
15. Calcule la cuota constante de un préstamo amortizable en 6 trimestres vencidos a una TET del 5%, cuya quinta cuota capital es de S/. 1 787,01. Rp. $R = 1\,970,18$.

Cuota capital en función del préstamo

16. Calcule la duodécima cuota capital de un préstamo de S/. 10 000 reembolsable en 18 cuotas mensuales uniformes vencidas a una TEA del 24%. Rp. $A_{12} = \text{S/. } 578,51$.
17. Obtenga la sexta cuota capital de un crédito de S/. 6 000 otorgado a una TNM del 2,50% durante 2 años reembolsable con cuotas constantes cada 90 días. Rp. $A_6 = \text{S/. } 824,57$.
18. En el examen practicado por una auditoría financiera se requiere conocer el importe de la quinta cuota capital. Para obtener este dato se tiene la siguiente información: préstamo original S/. 5 000; TNA 18% capitalizable trimestralmente; el número de cuotas constantes trimestrales vencidas es 8. Rp. $A_5 = \text{S/. } 635,67$.
19. La sexta cuota capital de un préstamo amortizable en 2 años con cuotas constante trimestrales vencidas es de S/. 2 000. Calcule el importe del préstamo otorgado a una TNA del 24% con capitalización diaria. Rp. $P = \text{S/. } 14\,761,82$.

Cuota capital en función de la primera cuota capital

20. La primera cuota capital de un préstamo otorgado al 3% efectivo bimestral es de S/. 500. Calcule la cuota capital correspondiente a la octava cuota constante bimestral vencida. Rp. $A_8 = \text{S/. } 614,94$.
21. Calcule la sexta cuota capital de un préstamo reembolsable en cuotas constantes quincenales vencidas con una TEM del 4%, cuya primera cuota capital es de S/. 750. Rp. $A_6 = \text{S/. } 827,26$.
22. La décima cuota capital de un préstamo otorgado a una TNA del 18% con capitalización trimestral y reembolsable con cuotas constantes bimestrales es de S/. 400. Calcule la primera cuota capital. Rp. $A_1 = \text{S/. } 307,16$.

Cuota interés en función de la cuota constante

23. ¿Cuál es el importe de la cuota interés de la décima cuota constante de un préstamo otorgado a una TEA del 28%, reembolsable en 12 cuotas mensuales vencidas de S/. 2 500? Rp. $I_{10} = \text{S/. } 149,62$.
24. Para conocer el efecto del escudo fiscal producido por un préstamo reembolsable en 36 cuotas constantes mensuales vencidas de S/. 2 000 con una TEA del 26%, se requiere conocer el importe de la cuota interés correspondiente a la duodécima cuota. Calcule dicha suma. Rp. $I_{12} = \text{S/. } 764,27$.
25. El importe de la cuota interés de la séptima cuota constante en un financiamiento otorgado al 28% efectivo anual y reembolsable en 8 cuotas semestrales vencidas es de S/. 2 500. Calcule el importe de la cuota constante. Rp. $R = \text{S/. } 11\,428,57$.

Cuota interés en función del préstamo

26. Un préstamo de S/. 10 000 debe ser reembolsado durante dos años con cuotas constantes cuatrimestrales a una TEM del 3%. ¿Cuál será el importe de la cuota interés de la quinta cuota? Rp. $I_5 = \text{S/. } 520,23$.
27. Calcule el importe de la cuota interés de la novena cuota constante de un préstamo de S/. 7 000 otorgado a una TEA del 21% para ser amortizado en 12 cuotas mensuales vencidas. Rp. $I_9 = \text{S/. } 39,76$.

28. La quinta cuota interés de un préstamo otorgado a una TNA del 24% y amortizable en 8 cuotas constantes trimestrales vencidas es de S/. 334,80. Calcule el importe del préstamo. Rp. $P = S/. 10\ 000$.

Deuda extinguida en función de A_1

29. Calcule la deuda extinguida al final de la décima cuota en un préstamo contratado a una TEA del 22% amortizable en cuotas constantes mensuales vencidas, cuya primera amortización fue de S/. 1 500. Rp. $E_{10} = S/. 16\ 179,61$.
30. Halle la deuda extinguida hasta la octava cuota de un préstamo amortizable cada 45 días con cuotas constantes vencidas. La TEA es del 28% y la primera cuota capital fue S/. 800. Rp. $E_8 = S/. 7\ 147,75$.
31. La deuda extinguida al final de la tercera cuota constante de un préstamo contratado a una TNA del 24% amortizable en cuotas trimestrales vencidas es de S/. 3 216,58. Calcule el importe de la primera amortización. Rp. $A_1 = S/. 1\ 010,36$.

Deuda extinguida en función R

32. Calcule la deuda extinguida al final del noveno pago en un préstamo concertado a una TEM del 3% con 12 cuotas constantes vencidas trimestrales de S/. 2 000. Rp. $E_9 = S/. 9\ 088,71$.
33. Calcule la deuda extinguida al final del décimo pago en un préstamo concertado a una TNM del 3% con 24 cuotas constantes vencidas bimestrales de S/. 3 000. Rp. $E_{10} = S/. 9\ 766,12$.
34. La deuda extinguida al final de la tercera cuota constante trimestral vencida es de S/. 3 216,58. Si el préstamo fue pactado a una TET del 6% durante 8 trimestres, ¿cuál es el importe de la cuota? Rp. $R = S/. 1\ 610,36$.

Deuda extinguida en función P

35. Calcule la deuda extinguida hasta la quinta cuota de un préstamo de S/. 4 000 contratado a una TEM del 2% amortizable en 10 cuotas constantes trimestrales vencidas. Rp. $E_5 = S/. 1\ 705,13$.
36. Un préstamo de S/. 7 000 ha sido contratado a una TNM del 2% durante dos años con cuotas uniformes bimestrales. Calcule la deuda extinguida al final de la décima cuota. Rp. $E_{10} = S/. 5\ 593,23$.

37. La deuda extinguida al final de la décima cuota es de S/. 5 000. Calcule el importe del préstamo si fue otorgado para ser amortizado en 12 cuotas constantes cuatrimestrales vencidas a una TNA del 36% capitalizable mensualmente. Rp. $P = \text{S/. } 6\,923,52$.

Deuda residual en función de R

38. Calcule la deuda residual al vencimiento de la octava cuota de un préstamo amortizable en 24 cuotas constantes mensuales vencidas de S/. 1 000 con una TNA del 24% Rp. $D_8 = \text{S/. } 13\,577,71$.
39. A fin de cancelar un préstamo contratado para ser amortizado en 12 cuotas constantes trimestrales vencidas y que en la fecha tiene 4 cuotas de S/. 2 000 por devengar, se requiere saber el importe del saldo insoluto. Efectúe el cálculo con una TEM del 2,5%. Rp. $D_8 = \text{S/. } 6\,670,36$.
40. La deuda residual al vencimiento de la séptima cuota constante es de S/. 5 000. Si el préstamo fue pactado para ser amortizado en 24 cuotas mensuales a una TEM del 3%, calcule el importe de la cuota constante. Rp. $R = \text{S/. } 379,76$.

Deuda residual en función de P

41. Calcule el importe del saldo insoluto o deuda residual de un préstamo de S/. 5 000 faltando 5 cuotas para su vencimiento total. La deuda fue contratada originalmente para ser amortizada en 12 cuotas trimestrales vencidas a una TNM del 2%. Rp. $D_7 = \text{S/. } 2\,512,19$.
42. Un préstamo de S/. 3 000 se amortiza mensualmente a una TEA del 20%. Calcule su deuda residual al final de la duodécima cuota constante vencida, considerando que el contrato estipula la amortización en 18 cuotas. Rp. $D_{12} = \text{S/. } 1\,092,42$.
43. Una persona que se dispone a salir del país decide cancelar sus deudas pendientes con algunas entidades del sistema financiero, el estado de sus cuentas es el siguiente:
- a) Deuda de S/. 8 000 contratada a una TNA del 24% capitalizable mensualmente, para ser amortizada en 12 cuotas trimestrales constantes vencidas. En la fecha se han cancelado 10 cuotas.

- b) Deuda de S/. 12 000 contratada a una TEA del 24% para ser amortizada en 24 cuotas bimestrales constantes vencidas. En la fecha se han cancelado 18 cuotas.
Determine el importe de las deudas residuales de ambos préstamos. Rp. a) $D_{10} = \text{S/. } 1\,758,08$; b) $D_{18} = \text{S/. } 4\,025,09$.
44. Un crédito de S/. 10 000 pactado para ser amortizado en 12 cuotas constantes trimestrales vencidas se cancela totalmente después de haber transcurrido 37 días de la décima cuota. Calcule el importe del pago a efectuar con una TNA del 24% capitalizable trimestralmente. Rp. $D_{10} + 37 \text{ días} = \text{S/. } 2\,239,83$.
45. Un préstamo de S/. 10 000 ha sido contratado para ser reembolsado en 12 cuotas trimestrales constantes vencidas. Al término de la octava cuota la deuda residual asciende a S/. 4 000,73. Calcule la TET aplicada al préstamo. Rp. TET = 5%.

Problemas combinados

46. Calcule la cuota interés y la cuota capital correspondiente a la sexta cuota constante vencida y la deuda extinguida y deuda residual al inicio de la séptima cuota. El préstamo de S/. 15 000 fue contratado para ser reembolsado en 8 cuotas constantes cada fin de trimestre con una TNA del 36% capitalizable trimestralmente. Rp. $I_6 = \text{S/. } 617,41$; $A_6 = \text{S/. } 2\,092,71$; $R = \text{S/. } 2\,710,12$; $E_6 = \text{S/. } 10\,232,61$; $D_6 = \text{S/. } 4\,767,40$.

Cálculo para hallar el número de cuotas

47. Una deuda de S/. 15 000 debe ser amortizada totalmente con pagos constantes bimestrales vencidos de S/. 2 000. ¿En cuánto tiempo podrá amortizarse si los saldos deudores generan una TEM del 2,5%? Rp. en 9,669529579 bimestres.
48. ¿Cuántos pagos trimestrales vencidos de S/. 3 000 deben efectuarse para amortizar una deuda de S/. 12 000 que devenga una TEM del 3%? ¿En qué fecha debe realizarse el último pago? Rp. $n = 5,226618739$; Fecha: 20 días después de la quinta cuota.
49. El 2 de marzo se contrae una deuda de S/. 4 000 que devenga una TEM del 3% para amortizarla con pagos uniformes vencidos de S/. 500 cada 30 días. ¿En qué fecha se realizará el último pago? Rp. $n = 9,284437286$; Fecha de pago: 5 de diciembre.

Importe de la última renta con n no entero

50. Una deuda de S/. 6 000 que devenga una TEM del 4% será amortizada con pagos uniformes vencidos de S/. 1 000 cada 45 días.
- Calcule el número de cuotas necesarias para cancelar el crédito.
 - ¿Cuántos días contiene el último período de renta?
 - Si el crédito fue otorgado el 1 de marzo, ¿en qué fecha vencerá la última cuota?
 - ¿Cuál es el importe de la última cuota?
 - Verifique a valor presente la consistencia del importe de las cuotas.
 - Si el préstamo se decide cancelar en 8 cuotas de 45 días, las 7 primeras de S/. 1 000 ¿cuál será el importe de la octava cuota?
 - Si el préstamo se decide cancelar en 7 cuotas de 45 días, las 6 primeras de S/. 1 000 ¿cuál será el importe de la séptima cuota?
- Rp. a) 7,681159453 cuotas; b) aproximadamente 31 días; c) El 10 de febrero del año siguiente; d) S/. 674,75; e) VP = S/. 6 000; f) S/. 687,52 g) S/. 1 648,24.

Cálculo para hallar la tasa de interés

51. Un crédito comercial de S/. 1 200 es otorgado para amortizarlo con 12 cuotas uniformes de S/. 130 al final de cada 30 días. ¿Cuál es la TEA cobrada? Rp. TEA = 65,48%.
52. Una máquina cuyo precio al contado es de S/. 5 000 se vende al crédito con una cuota inicial de S/. 3 000 y 4 cuotas uniformes quincenales vencidas de S/. 600. ¿Qué TEM se ha cargado al financiamiento? Rp. TEM = 16,02%.
53. Una campaña publicitaria anuncia la venta de un artefacto electrodoméstico a un precio de contado de S/. 3 000. Por el "día de la madre" otorga la siguiente oferta: cuota inicial S/. 500 y 6 pagos mensuales de S/. 450. Adicionalmente, a fin del cuarto mes, debe pagarse una cuota de S/. 50. ¿Cuál es la TES? Rp. TES = 17,92%.

Cuotas constantes vencidas en períodos variables

54. Calcule la cuota constante de un crédito de S/. 5 000 desembolsado el 26 de abril de 1994, otorgado para ser reembolsado en 6 cuotas trimestrales.

calendario vencido TCV (los días 26 de cada trimestre) a una TEM del 2%. Rp. $R = S/. 885,12$.

55. Un crédito de S/. 8 000 desembolsado el 26 de mayo de 1994 es contratado para amortizarlo en 5 cuotas uniformes cuyos vencimientos son: 16 de junio, 13 de agosto, 31 de agosto, 16 de setiembre y 15 de octubre. Prepare la tabla de reembolso considerando una TEM del 2%. Rp. $R = S/. 1\,630,19$.

Cuotas constantes anticipadas

56. Calcule la cuota de un crédito de S/. 4 000 amortizable en 8 cuotas constantes mensuales anticipadas con una TEM del 3%. Rp. $R_a = S/. 553,23$.
57. Una empresa necesita un financiamiento de S/. 5 000 el cual puede obtenerlo de una institución crediticia bajo la modalidad de cuotas anticipadas a una TEM del 3%. Si el crédito debe ser amortizado en 12 cuotas mensuales uniformes, ¿cuál será el importe del préstamo bruto y cual el importe de la renta uniforme? Rp. Préstamo bruto = S/. 5 540,39; $R_a = S/. 540,39$.
58. Un préstamo de S/. 5 000 se otorga para ser amortizado en 8 cuotas constantes mensuales anticipadas a una TEM del 4%. Si después de transcurridos 12 días de la quinta cuota la TEM se eleva al 4,5%, calcule la deuda residual en esa fecha, especificando el importe de cada cuota por devengar. Rp. $D_{4+12\text{ días}} = S/. 2\,012,96$; $R_6 = R_7 = R_8 = S/. 719,48$.

Cuotas constantes diferidas

59. Calcule la cuota constante de un préstamo de \$ 30 000 otorgado por un organismo internacional a una empresa estatal para ejecutar un proyecto social. El crédito debe ser amortizado en 5 años con cuotas constantes semestrales vencidas a una TEA del 12%. El plazo total incluye dos períodos diferidos. Rp. $R = S/. 5\,374,47$.
60. Un préstamo de S/. 10 000 es otorgado a una TEM del 4% para ser reembolsado en el plazo de dos años con cuotas bimestrales constantes vencidas, el plazo incluye 3 cuotas diferidas. Calcule el importe de la cuota constante considerando que el préstamo se desembolsó en dos armadas: la primera de S/. 7 000 y la segunda de S/. 3 000, transcurrido 37 días después del primer desembolso. Rp. $R = S/. 2\,010,13$.

61. ¿Cuál será el importe equivalente a pagar hoy si se decide anticipar tres pagos de S/. 3 000 cada uno los cuales vencen dentro de cuatro, cinco y seis meses respectivamente? La TEM es del 5%. Rp. $P = S/. 7\,057,33$.
62. Una persona requiere un financiamiento por el cual puede pagar 8 cuotas constantes bimestrales vencidas de S/. 3 000 empezando dentro de 4 meses contados a partir de hoy. Calcule el importe del préstamo que puede solicitar, el mismo que devengará una TNA del 36%. Rp. $P = S/. 17\,574,89$.
63. Una empresa recibe un préstamo de S/. 20 000 para cancelarlo en el plazo de 4 años con cuotas uniformes cada fin de trimestre. La TET será: 4% durante los dos primeros años, 5% el tercer año y 6% el cuarto año. La primera cuota vencerá al finalizar el sexto mes. Calcule el importe de las cuotas constantes y la TET promedio aplicada al préstamo durante los 4 años de vigencia. Compruebe su respuesta. Rp. $R_1 = S/. 1\,870,77$; $R_2 = S/. 1\,948,79$; $R_3 = 1\,994,26$; $TET = 4,2999431\%$.

Amortizaciones constantes

64. Prepare una tabla de reembolso para un préstamo de S/. 5 000 que será reembolsado con 8 amortizaciones constantes trimestrales vencidas y una TEM del 4%. El primer desembolso de S/. 3 000 se efectuó el 9 de marzo, el segundo desembolso de S/. 1 500 fue el 14 de abril y el último desembolso de S/. 500 fue el 18 de junio. Las variaciones de tasas se produjeron en las siguientes fechas: el 30 de marzo, 3,5%; el 24 de abril, 3% y el 6 de junio, 3,9%. Rp.

Cuota	1	2	3	4	5	6	7	8
Interés	399,72	531,189	462,60	385,50	308,40	231,30	154,20	77,10
Amort.	562,50	633,93	633,93	633,93	633,93	633,93	633,93	633,93
Total	962,22	1165,82	1096,53	1019,43	942,33	865,23	788,13	711,03

Interés constante

65. Una empresa ha comprado bonos por un importe de S/. 10 000 emitidos por una empresa de *leasing*, los mismos que rinden una TEM del 3% con intereses pagaderos al final de cada trimestre calendario. La adquisición

se efectuó el 14 de marzo. Prepare la tabla de reembolso considerando que los bonos deben redimirse al cabo de dos años.

Cuotas crecientes aritméticamente

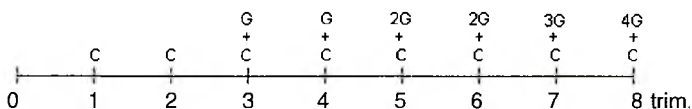
66. Calcule el importe que habrá acumulado una empresa al finalizar el primer año, si a fin de cada mes deposita S/. 500. Después del primer depósito estos se incrementan en S/. 50 cada mes. Prepare la tabla referencial de acumulación aplicando una TEM del 3%. Rp. S = S/. 10 749,40.

Cálculo del gradiente aritmético convencional

67. Un préstamo de S/. 5 000 se ha otorgado para reembolsarlo en 8 cuotas trimestrales vencidas que experimentarán un crecimiento aritmético de S/. 95,51 en cada cuota. Calcule la cuota base aplicando una TNM del 2% y formule la tabla de reembolso. Rp. C = S/. 500.
68. Un préstamo de S/. 5 000 se ha otorgado para reembolsarlo en 8 cuotas trimestrales vencidas que experimentarán un crecimiento aritmético en cada cuota. La cuota base es S/. 500 y la TNM es 2%. Calcule el importe del gradiente aritmético convencional. Rp. G = S/. 95,51.

Cálculo del gradiente aritmético no convencional

69. Un préstamo de \$ 10 000 para construcción de una casa-habitación ha sido otorgado a una TEM del 1% para pagarlo en tres años con cuotas mensuales vencidas. La cuota base inicial es el 50% del sueldo básico familiar que en la fecha del desembolso es \$ 500. Calcule el gradiente de crecimiento aritmético mensual que se iniciará a partir del décimo tercer pago. Formule la tabla de reembolso. Rp. G = \$ 10,91.
70. En el siguiente diagrama de flujo de caja calcule G considerando C = 1 000 y TET = 4%. Rp. G = 321,24.



Cuotas crecientes geométricamente

71. Prepare la tabla de reembolso de un préstamo de \$ 5 000 amortizable en 10 cuotas cuatrimestrales vencidas con una TEC del 4%. Cada cuota experimentará una tasa de crecimiento geométrico convencional del 2%. Rp. $C = \$ 566,60$.
72. Calcule el valor presente de un préstamo otorgado para ser reembolsado con ocho cuotas trimestrales vencidas a una TET del 4% y con un gradiente de crecimiento geométrico convencional del 2%. El importe de la primera cuota fue de \$ 1 500. Rp. $P = \$ 10\,791$.
73. Un crédito de \$ 5 000 reembolsable en 10 cuotas trimestrales vencidas, fue concedido por una institución financiera a una TET del 5%. Calcule la tasa del gradiente de crecimiento geométrico convencional para amortizar totalmente el préstamo en el plazo pactado. El importe de la primera cuota o cuota base fue \$ 571,59. Rp. $g = 3\%$.
74. ¿En cuánto tiempo quedará totalmente depreciada una maquinaria adquirida a un precio de \$ 6 000 cuyo cargo inicial por depreciación en el primer mes fue de \$ 120? La tasa de depreciación es del 2% mensual la cual experimentará un crecimiento geométrico del 3% mensual a partir del segundo mes. Rp. $n = 41,56$.

Cuotas con amortizaciones crecientes periódicamente

75. Prepare una tabla referencial de reembolso de un préstamo de \$ 4 000 reembolsable con 10 cuotas trimestrales vencidas con amortización creciente. Los porcentajes anuales de amortización serán: el primer año, 20%; el segundo año, 30% y el tercer año 50%. La TEA es del 25%.

Suma de números dígitos

76. Prepare una tabla referencial de reembolso de un préstamo de \$ 1 000 amortizable en 9 pagos bimestrales con cuotas crecientes de acuerdo al sistema de números dígitos. La TET es del 5%.
77. Calcule la octava amortización de un préstamo de S/. 8 500 otorgado para ser reembolsado en doce cuotas mensuales, por el sistema de cuotas crecientes de suma de números dígitos. La TEM es del 2%. Rp. $A_8 = S/. 871,79$.

Sistema de Reajuste de Deuda

78. Un crédito de S/. 5 000 es otorgado para ser amortizado en 10 cuotas pagaderas cada fin de trimestre con una TEM del 2% reajutable con la inflación. Al momento de la firma del contrato del préstamo se prepara la tabla referencial de reembolso proyectando la inflación histórica del último bimestre que fue en el primer mes, 2,5% y en el segundo mes, 1,8%. Al vencimiento del crédito se conocen las siguientes inflaciones trimestrales:

Trim.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inf. %	4,5	4,3	4,5	4,0	6,2	5,8	5,5	4,7	5,2	5,8

Prepare la tabla referencial de reembolso y la tabla definitiva.

79. Prepare la tabla referencial de reembolso y la tabla definitiva para un préstamo de S/. 8 000 amortizable en 10 cuotas cada fin de mes con el sistema de reajuste de deudas. La tasa del préstamo será del 2% mensual y con el reajuste no podrá exceder de una TEM del 5%. El reajuste será la inflación calculada con el índice de precios al consumidor. Al vencimiento del plazo del crédito se conocen las siguientes variaciones mensuales de inflación:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inf. %	2,5	2,3	4,2	4,0	2,2	1,8	1,5	3,7	3,2	2,8

16. Resumen del capítulo

Amortizar es el proceso mediante el cual una deuda que devenga intereses se extingue por medio de pagos parciales que pueden iniciarse conjuntamente con la percepción del stock de efectivo, al vencimiento de cada período de pago o después del vencimiento de varios períodos de pago. Los pagos, servicios o cuotas con los que se reembolsa un préstamo se aplican en primera instancia a cubrir el interés generado por el saldo insoluto de la deuda y la diferencia a amortizar o disminuir el capital. Si los pagos no pueden cubrir los intereses, la

deuda se capitaliza. Al vencimiento de una cuota si ésta no fuese cancelada origina, además del interés compensatorio, el interés de mora.

Conjuntamente con el desembolso del préstamo se emite la tabla referencial de reembolso o cuadro de servicio de la deuda, el mismo que indica la fecha de los vencimientos, el importe del interés, amortización y cuota del préstamo. Cuando existen variaciones en la tasa de interés no se efectúan los pagos en la fecha de sus vencimientos, o los préstamos son desembolsados en partes, y las tablas referenciales sufren variaciones. En estos casos es necesario preparar tablas definitivas que registren estas variaciones.

Los principales sistemas de amortización de préstamos son: cuotas constantes, amortizaciones constantes, interés contante, cuotas crecientes y sistema de reajuste de deudas; sin embargo, puede darse un conjunto de combinaciones de estos sistemas que hacen su campo de aplicación inagotable. El desarrollo de amortizaciones en estos sistemas combinados debe realizarse teniendo en consideración el principio de equivalencia financiera, de lo contrario puede darse el caso de que la tasa de interés anunciada no coincida con la realmente cobrada.

En los préstamos reembolsables con cuotas constantes, la cuota capital de cualquier cuota puede calcularse en función: de la cuota, del préstamo y de la primera cuota capital. Asimismo, la cuota interés de cualquier cuota puede calcularse en función: de la cuota y del préstamo.

La deuda extinguida de un préstamo corresponde a la sumatoria de las cuotas amortizaciones o cuotas capitales que ya han vencido, independientemente de que hayan sido canceladas o no. La deuda extinguida en un préstamo que se reembolsa en cuotas constantes puede calcularse en función de la primera cuota capital, en función de la cuota constante o en función del principal.

La deuda residual o saldo insoluto está constituido por las cuotas por devengar. En un préstamo que se amortiza en cuotas uniformes, la deuda residual puede calcularse en función de R y en función de P .

El número de cuotas en un préstamo que se amortiza en cuotas constantes se halla por interpolación o aplicando la fórmula de n . Cuando el resultado matemático obtenido al hallar el número de cuotas constantes necesario para

amortizar un préstamo u obligación es un número no entero se recomienda redondear ese número al entero inferior o superior, la anualidad en este caso es impropia o variable porque su última cuota difiere de las anteriores.

El cálculo de la tasa de interés de modo similar al cálculo de los períodos de tiempo se efectúa por interpolación.

Las cuotas constantes para períodos de tiempo variables se obtienen aplicando al préstamo original un FAS calculado con el número de días exactos que median entre el vencimiento de cada cuota. Las cuotas constantes diferidas se calculan con las fórmulas de las anualidades diferidas.

Para amortizar un crédito con cuotas constantes se divide el préstamo entre su número de cuotas. En los créditos que se amortizan con interés constante, en cada cuota se paga sólo interés y en la última cuota, además del interés generado por el saldo insoluto, se devuelve el íntegro del préstamo. Las cuotas crecientes aritmética y geométricamente se obtienen aplicando las fórmulas de gradientes. Puede amortizarse un préstamo haciendo creciente la amortización cada cierto período de tiempo, de acuerdo con una tabla cuyos porcentajes de amortización sumen el 100% al finalizar la última cuota. El sistema de números dígitos amortiza en cada cuota una proporción del capital igual a una fracción compuesta por un numerador igual al número de la cuota del préstamo y un denominador constante igual a la suma del número de cuotas. El Sistema de Reajuste de Deudas aplica a los saldos deudores una tasa efectiva compuesta por una tasa nominal del préstamo y una tasa de reajuste indexado a algún factor de crecimiento. El interés se aplica sobre el saldo reajustado.

XV

Depreciación

Introducción

La *depreciación* (D) es la disminución del valor de propiedad de un activo fijo producido por el paso del tiempo, desgaste por uso, caída en desuso, insuficiencia técnica, obsolescencia u otros factores de carácter operativo, tecnológico, tributario, etc. La depreciación puede calcularse sobre su valor de uso, su valor en libros, el número de unidades producidas, o en función de algún índice establecido por la autoridad competente o por estudios técnicos de ingeniería económica sobre reemplazamiento de activos.

Para cubrir la depreciación del activo es necesario formar un fondo de reserva (F) a través de los cargos por depreciación efectuados periódicamente de acuerdo con un método previamente escogido. El fondo de reserva o depreciación acumulada permitirá sufragar el costo de reemplazo del activo al final de su vida útil.

En la depreciación de activos es necesario tener en cuenta los siguientes conceptos:

Costo inicial C, es el costo de adquisición del activo, incluyendo: fletes, embalajes, instalación y demás gastos para dejar operativo el activo adquirido.

Vida útil n, es el tiempo durante el cual el activo puede producir antes de ser reemplazado o descartado. Existen casos en que la vida útil según especificaciones técnicas difieren de la vida útil señalada para efectos legales o tributarios.

Valor contable V o valor en libros, es la diferencia entre el costo del activo menos el fondo de reserva o depreciación acumulada.

Valor comercial, es el valor de realización del activo; el efectivo que puede obtenerse en el mercado en el caso de la venta del activo. Pueden existir discrepancias en el valor comercial y valor contable de un activo.

Valor de salvamento, deshecho o recuperación L, es el importe neto que se estima puede obtenerse al realizar un activo al final de su vida útil. Incluye el costo de desmantelamiento y gastos adicionales, por lo tanto este valor puede ser positivo, cero o negativo.

Valor de uso W, es la diferencia entre el costo inicial y el valor de salvamento ($W = C - L$).

El *agotamiento* de un activo aplicado a los recursos naturales se produce cuando el activo se extingue, consume o desaparece progresivamente debido a la utilización de sus recursos aprovechables. Tal como sucede, por ejemplo, en las explotaciones mineras. El concepto de depreciación aplicado a los activos intangibles se denomina *amortización*.

Un activo puede depreciarse de muchas maneras. Los métodos más utilizados son:

Métodos de depreciación	
-	Uniforme o de línea recta
-	Porcentaje fijo del valor decreciente en libros (Saldo Decreciente)
-	Doble saldo decreciente
-	Fondo de amortización
-	Interés sobre la inversión
-	Unidades producidas
-	Suma de números dígitos

1. Método uniforme o de línea recta

1.1 Depreciación

Este método distribuye uniformemente la depreciación entre los años de vida útil del activo. La depreciación periódica se obtiene dividiendo el valor de uso por la vida útil:

$$D = \frac{C - L}{n} \quad (113)$$

La tasa uniforme de depreciación (r) aplicable al valor de uso en cualquier período h , para encontrar su respectiva depreciación, se obtiene con:

$$r = \frac{1}{n}$$

Ejemplo 1.- Obtenga el importe del cargo por depreciación anual de un activo fijo cuyo costo inicial es de \$ 10 000 con una vida útil estimada de 4 años y un valor de salvamento de \$ 2 000. Prepare la tabla de depreciación y calcule además la tasa uniforme de depreciación anual.

Solución

$D = ?$

$C = 10\,000$

$n = 4$

$L = 2\,000$

$$D = \frac{C - L}{n}$$

$$D = \frac{10\,000 - 2\,000}{4} = 2\,000$$

Año n	Depreciación	Fondo de reserva	Valor contable
0			10 000
1	2 000	2 000	8 000
2	2 000	4 000	6 000
3	2 000	6 000	4 000
4	2 000	8 000	2 000

$$\text{Tasa uniforme de depreciación anual } r = \frac{1}{4} = 0,25$$

Los cargos por depreciación hacen que el valor contable del activo disminuya en progresión aritmética, en un importe igual al incremento del fondo de reserva o depreciación acumulada.

Si graficamos en un diagrama cartesiano la depreciación de cada uno de los períodos y unimos los puntos se obtiene una línea recta de pendiente 0. Para el fondo de reserva obtendremos una línea recta de pendiente positiva y para el valor contable una de pendiente negativa.

1.2 Fondo de reserva o depreciación acumulada

El fondo de reserva **F** se constituye por la acumulación de la depreciación que periódicamente se realiza sobre el valor de uso del activo. Contablemente, la depreciación se abona a la cuenta depreciación acumulada con cargo a la cuenta provisiones del ejercicio, la misma que se traslada al costo de producción.

Si designamos **h** como los períodos de tiempo transcurridos desde la fecha de adquisición del activo entonces, en cualquier momento **F**, puede obtenerse multiplicando la **D** por **h**.

$$F = \left[\frac{C - L}{n} \right] h \quad (114)$$

Ejemplo 2.- Calcule el importe acumulado en el fondo de reserva después de 6 años y medio de adquirida una máquina depreciable en línea recta, cuyo costo de adquisición fue \$ 6 000 la cual tiene una vida útil de 8 años y un valor de salvamento de \$/. 500.

Solución

$$F = ?$$

$$h = 6,5$$

$$C = 6\,000$$

$$L = 500$$

$$F = \left[\frac{C - L}{n} \right] h$$

$$n = 8 \qquad F = \left[\frac{6\,000 - 500}{8} \right] 6,5 = 4\,468,75$$

1.3 Valor contable

El valor contable V en cualquier período h , es igual a la diferencia entre el costo inicial y el importe acumulado en el fondo de reserva.

$$V_h = C - \left[\frac{C - L}{n} \right] h \quad (115)$$

Ejemplo 3.- El costo de adquisición de una máquina fue de \$ 3 000. Tiene una vida útil de 5 años y un valor de recuperación de \$ 500. La máquina se deprecia en línea recta. Calcule su valor contable al finalizar su octavo mes de vida.

Solución

$$V_h = ?$$

$$C = 3\,000$$

$$n = 5$$

$$L = 500$$

$$h = 8/12$$

$$V_{8/12} = C - \left[\frac{C - L}{n} \right] h$$

$$V_{8/12} = 3\,000 - \left[\frac{3\,000 - 500}{5} \right] \frac{8}{12} = 2\,667$$

2. Método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros (saldo decreciente)

El objetivo de este método de amortización rápida es que la suma de los cargos por depreciación y los gastos de reparación (crecientes a lo largo de la vida de la máquina e independientes de la depreciación), sea una cantidad que se aproxime a una constante. Esto se obtiene depreciando mayores importes en los primeros años de vida de la máquina y disminuyendo los cargos en la medida en que su antigüedad demande mayores gastos de reparación. Las depreciaciones decrecientes se obtienen aplicando en cada período una tasa de depreciación o porcentaje fijo al valor contable del activo.

2.1 Valor contable

El valor contable en cualquier momento es igual a la diferencia entre el costo del activo y la depreciación: $V = C - D$.

Designando:

$V_1, V_2, \dots, V_h, \dots, V_n$ al valor contable al final de los años 1, 2, ..., h, ..., n
respectivamente
 r al porcentaje fijo.

El valor contable en el momento h obtiene en forma similar a la fórmula (40) del descuento bancario compuesto.

Año	Depreciación	Valor contable
0		$V_0 = C = C(1 - r)^0$
1	$V_0 r$	$V_1 = V_0 - V_0 r = C - Cr = C(1 - r)$
2	$V_1 r$	$V_2 = V_1 - V_1 r = V_1(1 - r) = C(1 - r)^2$
\vdots	\vdots	\vdots
h	$V_{h-1} r$	$V_h = V_{h-1} - V_{h-1} r = V_{h-1}(1 - r) = C(1 - r)^h$
\vdots	\vdots	\vdots
n	$V_{n-1} r$	$V_n = V_{n-1} - V_{n-1} r = V_{n-1}(1 - r) = C(1 - r)^n$

$$V_h = C(1 - r)^h \quad (116)$$

2.2 Depreciación

Al finalizar el último año el valor contable de un activo es igual a su valor de salvamento $V = L$. Aplicando la fórmula (116) obtenemos:

$$L = C(1 - r)^n$$

Despejando r de la fórmula anterior se obtiene la tasa de depreciación que aplicado como un porcentaje fijo al valor contable nos dará el importe de la depreciación.

$$r = 1 - \left(\frac{L}{C} \right)^{1/n} \quad (117)$$

La depreciación en un período h es igual a la tasa r multiplicada por el valor contable en el período $h - 1$.

$$D_h = rC(1 - r)^{h-1} \quad (118)$$

2.3 Fondo de reserva

Por definición sabemos que para cualquier período h , el valor contable V más el fondo de reserva F o depreciación acumulada, es igual al costo de adquisición C del activo:

$$(1) \quad V_h + F_h = C$$

$$(2) \quad F_h = C - V_h$$

Transcurrido h períodos, podemos hallar el importe acumulado en el fondo reemplazando en (2) el equivalente de V_h .

$$F_h = C - C(1 - r)^h$$

$$F_h = C [1 - (1 - r)^h] \quad (119)$$

Para calcular el fondo de reserva evitando calcular explícitamente r , se deduce la siguiente fórmula:

- | | | |
|-----|---------------------------------------|------------------------------------|
| (1) | $F_h = C - V_h$ | Fondo de reserva en el momento h |
| (2) | $V_h = C(1 - r)^h$ | Valor contable en el momento h |
| (3) | $r = 1 - (L / C)^{1/n}$ | Tasa de depreciación |
| (4) | $V_h = C \{1 - [1 - (L/C)^{1/n}]\}^h$ | Reemplazando (3) en (2) |
| (5) | $V_h = C (L/C)^{h/n}$ | Reduciendo (4) |

$$(6) \quad F_h = C - C (L/C)^{h/n} \quad \text{Reemplazando (5) en (1)}$$

$$F_h = C \left[1 - \left(\frac{L}{C} \right)^{h/n} \right] \quad (120)$$

Ejemplo 4.- Aplicando el método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros, obtenga el importe del cargo por depreciación anual de un activo fijo cuyo costo inicial es de \$ 10 000 con una vida útil estimada de 4 años y un valor de salvamento de \$ 2 000.

Solución

$$D = ?$$

$$C = 10\,000$$

$$n = 4$$

$$L = 2\,000$$

$$r = 1 - \left(\frac{L}{C} \right)^{1/n}$$

$$r = 1 - \left(\frac{2\,000}{10\,000} \right)^{1/4} = 0.331259695$$

Año n	Depreciación 0,331259695	Fondo de reserva	Valor contable
0			10 000,00
1	3 312,60	3 312,60	6 687,40
2	2 215,27	5 527,86	4 472,14
3	1 481,44	7 009,30	2 990,70
4	990,70	8 000,00	2 000,00

El valor contable puede verificarse en cualquier momento aplicando (116). Por ejemplo el valor contable al final del tercer año se calcula:

$$V_h = C(1 - r)^h$$

$$V_3 = C(1 - r)^3$$

$$V_3 = 10\,000 (1 - 0.331259695)^3$$

$$V_3 = 2\,990,70$$

Del mismo modo el fondo de reserva en cualquier momento se obtiene aplicando (119 ó (120). Por ejemplo el fondo de reserva a fin del tercer año es:

$$F_h = C[1 - (1 - r)^h]$$

$$F_3 = C[1 - (1 - r)^3]$$

$$F_3 = 10\,000[1 - (1 - 0,331259695)^3]$$

$$F_3 = 7\,009,30$$

3. Apreciaciones al método de línea recta y al método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros

El método uniforme o de línea recta es el más usado por las empresas debido a su facilidad para aplicarlo. Considera cantidades uniformes de depreciación: sin embargo, generalmente los costos de reparación, en los primeros años de vida del activo, son menores comparados con los costos que demandan las reparaciones en sus últimos años de vida útil. Para contrarrestar estos mayores gastos se pueden planificar cargos por depreciación más elevados al inicio de la vida útil que tiendan a disminuir, en la medida en que la máquina demande mayores importes para reparación.

Esta observación es superada por el método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros, que origina depreciaciones decrecientes. Es necesario, en este método, asignar un valor de recuperación positivo. Si éste fuese cero, tendría que asumirse como valor de recuperación el importe de una unidad monetaria.

Ambos métodos no tienen en cuenta las probables variaciones en el nuevo costo de la máquina cuando tenga que ser reemplazada, así como no consideran ningún interés sobre el fondo que se va generando para el reemplazo de la máquina.

4. Método del doble saldo decreciente

En este método el porcentaje máximo de depreciación aplicable al costo inicial del activo es del 200%, o sea el equivalente al doble del utilizado en el método de línea recta. La tasa de depreciación periódica r aplicable al valor contable en libros y considerando los porcentajes de depreciación del 200%, 175% y 150% se obtienen con las siguientes fracciones:

% Máximo de depreciación	200%	175%	150%
r	$\frac{2}{n}$	$\frac{1,75}{n}$	$\frac{1,50}{n}$

4.1 Valor contable

El valor contable en libros en cualquier período h , considerando un porcentaje máximo de depreciación del 200%, se puede calcular directamente aplicando la siguiente fórmula:

$$V_h = \left[1 - \frac{2}{n} \right]^h [\text{Costo inicial}] \quad (121)$$

De acuerdo con la fórmula (121) el valor contable nunca puede ser cero, por lo que se permite efectuar el cambio al método de línea recta en cualquier año de la vida fiscal del activo. La elección del punto de cambio debe estudiarse para determinar su conveniencia o no desde el punto de vista fiscal.

4.2 Depreciación

La depreciación en cualquier período h se obtiene multiplicando la tasa de depreciación por el valor contable en libros en el período $h - 1$:

$$D_h = \frac{2}{n} \left[1 - \frac{2}{n} \right]^{h-1} [\text{costo inicial}] \quad (122)$$

Ejemplo 5.- Aplicando el método del doble saldo decreciente con un porcentaje máximo de depreciación del 200%, prepare la tabla de depreciación de un activo fijo cuyo costo inicial es de \$ 10 000 y cuya vida útil estimada es de 4 años. Calcule directamente el valor contable y la depreciación en el período 2.

Solución

$$r = 2/4 = 0,5$$

Año n	Depreciación 0,5	Fondo de reserva	Valor contable
0			10 000
1	5 000	5 000	5 000
2	2 500	7 500	2 500
3	1 250	8 750	1 250
4	625	9 375	625

Valor contable en el segundo período

$$V_2 = \left[1 - \frac{2}{4} \right]^2 [10\ 000] = 2\ 500$$

Depreciación en el segundo período

$$D_2 = \frac{2}{4} \left[1 - \frac{2}{4} \right]^{2-1} [10\ 000] = 2\ 500$$

5. Método del fondo de amortización

Este método considera que los importes de depreciación se colocan en un fondo que gana una tasa de interés i durante n años, con el objeto de amortizar el importe del reemplazo de la máquina depreciada totalmente al final de su vida útil.

5.1 Depreciación

La depreciación constante se obtiene en forma similar al de una renta en función de su valor futuro calculada con la fórmula (64') $R = S \cdot FDFA_{i;n}$. Igualando D a R y sustituyendo S por $C - L$, el importe de la depreciación o de los cargos periódicos para reemplazar el activo, está dado por la siguiente fórmula:

$$D = (C - L) FDFA_{i;n} \quad (123)$$

Ejemplo 6.- Aplicando el método del fondo de amortización, obtenga el importe del cargo por depreciación anual de un activo fijo cuyo costo inicial es de \$ 10 000 con una vida útil estimada de 4 años y un valor de salvamento de \$ 2 000. Los cargos por depreciación serán colocados en un fondo que rinde una TEA del 5%.

Solución

Método del fondo de amortización

Año n	Cargo anual depreciación	Interés sobre el fondo 5%	Total acumulado al fondo	Acumulado al fondo de reserva	Valor contable en libros
0					10 000,00
1	1 856,09	0,00	1 856,09	1 856,09	8 143,91
2	1 856,09	92,80	3 712,18	3 804,99	6 195,01
3	1 856,09	190,25	5 568,27	5 851,34	4 148,66
4	1 856,09	292,57	7 424,36	8 000,00	2 000,00
	7 424,38	575,62	8 000,00		

$$D = ?$$

$$C = 10\,000$$

$$L = 2\,000$$

$$n = 4$$

$$i = 0,05$$

$$D = (C - L) \text{FDFA}_{0,05,4}$$

$$D = (10\,000 - 2\,000) \text{FDFA}_{0,05,4}$$

$$D = 8\,000 \times 0,2320118326$$

$$D = 1\,856,09$$

6. Método del interés sobre la inversión

El método del interés sobre la inversión complementa al método del fondo de amortización incluyendo, además del interés que rinde el importe de la depreciación colocado en un fondo, el interés que debe rendir la inversión (sobre el costo inicial del activo o sobre su valor contable). Ambas tasas no necesariamente son coincidentes. El pago periódico constante que servirá para reemplazar el activo al final de su vida útil y además rinda un determinado interés sobre la inversión que demandó la adquisición del activo se obtiene aplicando el FDFA al valor de uso, donde la inversión inicial genera una tasa de interés determinada.

El importe del cargo total por la depreciación periódica se calcula con la fórmula que se deduce a continuación.

- (1) $W = C - L$ Valor de uso
- (2) $C(1 + i)^n - C$ Interés generado por la inversión original
- (3) $W' = C(1 + i)^n - L$ W más interés sobre la inversión
- (4) $W' FDF_{i;n}$ Pago constante para acumular (3)

Igualando D a (4) y reemplazando W' por su equivalente:

$$D = [C(1 + i)^n - L] FDF_{i;n} \quad (124)$$

La fórmula (124) calcula el pago constante necesario para acumular el importe del reemplazo del activo y generar un interés sobre la inversión original.

Ejemplo 7.- Aplicando el método del interés sobre la inversión, obtenga el importe del pago a efectuar a un fondo de depreciación para que cubra los intereses sobre la inversión considerando una TEA del 5%. El activo fijo tiene un costo inicial de \$ 10 000, una vida útil estimada de 4 años y un valor de salvamento de \$ 2 000.

Solución

$$\begin{aligned}
 D &= ? & D &= [C(1 + i)^4 - L] FDF_{0,05;4} \\
 C &= 10\,000 & D &= [10\,000(1 + 0,05)^4 - 2\,000] FDF_{0,05;4} \\
 L &= 2\,000 & D &= 10\,155,06 \times 0,2320118326 \\
 n &= 4 & D &= 2\,356,09 \\
 i &= 0,05
 \end{aligned}$$

En el siguiente cuadro de depreciación por el método del interés sobre la inversión, las columnas han sido trabajadas de acuerdo al siguiente detalle.

Depreciación por el método del interés sobre la inversión

Año n	Cargo total (a) Fórmula	Interés sobre libros (b) (g) x 5%	Cargo anual (c) (C-L)FDFA	Interés sobre el fondo (d) (f) x 5%	Total adición al fondo (e) c + d	Acumulado al fondo de reserva (f) f + e	Valor contable en libros (g) g - e
0							10 000,00
1	2 356,09	500,00	1 856,09	0,00	1 856,09	1 856,09	8 143,91
2	2 356,09	407,20	1 856,09	92,80	1 948,90	3 804,99	6 195,01
3	2 356,09	309,75	1 856,09	190,25	2 046,34	5 851,34	4 148,66
4	2 356,09	207,43	1 856,09	292,57	2 148,66	8 000,00	2 000,00
	9 424,38	1 424,38	7 424,38	575,62	8 000,00		

- (a) **Cargo total**, cargo anual para reponer el activo y pagar el interés sobre la inversión. Se calcula con la fórmula (124). El cargo total es igual a la suma de las columnas (b) + (c) + (d).
- (b) **Interés sobre libros**, interés calculado sobre el valor del activo en libros, columna (g).
- (c) **Cargo anual**, cargo por la depreciación, se calcula aplicando la fórmula (123) y es igual a la columna del cargo total menos el interés del 5% sobre el valor inicial del activo.
- (d) **Interés sobre el fondo**, es el interés del 5% que produce el fondo de reserva para depreciación. La suma de las columnas (b) y (d), interés sobre libros e interés sobre el fondo, es igual al 5% del valor inicial del activo.
- (e) **Total adición al fondo**, es la suma de las columnas (c) + (d). Al término de la vida útil, el fondo acumulado por depreciaciones será igual al valor de uso del activo.
- (f) **Acumulado al fondo de reserva**, es la acumulación de la columna (e).
- (g) **Valor contable en libros**, corresponde al valor del activo en libros en un período determinado; es decreciente. En cualquier momento el importe de esta columna más el de (f) es igual al valor original del activo.

7. Método de unidades producidas

Este método contempla la depreciación de los activos de acuerdo con la intensidad de su uso, dejando de lado el factor tiempo y relacionando los cargos de depreciación de acuerdo con algún factor de producción de bienes o servicios, como por ejemplo: unidades producidas, horas trabajadas, km recorridos, horas de vuelo, etc. Para estos efectos es necesario conocer las unidades de producción del activo que determinan su vida útil, según las especificaciones técnicas de los fabricantes o instituciones especializadas. De acuerdo con los estándares establecidos, la depreciación se va aplicando a prorrata, dividiendo el valor de uso entre la producción total del activo y multiplicando este factor unitario por la escala de producción anual estimada.

$$D = \left[\frac{C - L}{\text{Producción total}} \right] \text{prod. anual} \quad (125)$$

Ejemplo 8.- Una máquina adquirida en \$ 8 000 tiene las siguientes especificaciones técnicas: capacidad de producción diaria máxima: 100 unidades, vida útil de producción: 125 000 unidades. El departamento de programación estima los siguientes niveles de producción para los próximos 4 años: 20 000, 25 000, 35 000, 30 000 y 15 000 unidades respectivamente. Calcule la depreciación anual considerando un valor de recuperación de \$ 1 000.

Solución

Años	Cálculo	Depreciación	Fondo de reserva	Valor en libros
0				8 000
1	20 000 x 0,056	1 120	1 120	6 880
2	25 000 x 0,056	1 400	2 520	5 480
3	35 000 x 0,056	1 960	4 480	3 520
4	30 000 x 0,056	1 680	6 160	1 840
5	15 000 x 0,056	840	7 000	1 000

$$D = \left[\frac{C - L}{125\,000} \right] \text{prod. anual}$$

$$D = \left[\frac{8\,000 - 1\,000}{125\,000} \right] \text{prod. anual} = [0.056] \text{prod. anual}$$

8. Método de suma de números dígitos

Este método es similar al método de amortización desarrollado en el capítulo XIV Amortización, punto 12. La variación radica en que el cargo por depreciación anual se obtiene multiplicando el valor de uso del activo por una fracción cuyo numerador es el número de años que le restan de vida al activo y el denominador es la suma de los dígitos de la vida útil estimada del bien.

$$D = C - L \left[\frac{\text{años que le restan al activo}}{\text{suma de dígitos}} \right] \quad (126)$$

La suma de dígitos puede obtenerse con la siguiente fórmula:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

La depreciación decreciente, obtenida con la fórmula (126), está en relación inversa con los años de vida útil estimada del activo, considerando que a mayor antigüedad el activo demandará mayores gastos en reparaciones, con lo cual pueden planearse cargos por depreciación y desembolsos por reparaciones que, en conjunto, tiendan a ser uniformes para la empresa.

La tasa de depreciación aplicable al valor de uso en cualquier período h , para encontrar su respectiva depreciación, se obtiene con la siguiente fórmula:

$$r = \frac{n - h + 1}{\text{Suma de dígitos}}$$

Ejemplo 9.- Según la suma de números dígitos obtenga el importe del cargo por depreciación anual de un activo fijo cuyo costo inicial es de \$ 10 000 con una vida útil estimada de 4 años y un valor de salvamento de \$ 2 000. Prepare la tabla de depreciación y obtenga directamente la depreciación aplicable al tercer año de vida útil del activo.

Solución

Años		Proporción	Depreciación	Fondo de reserva	Valor contable
Vida útil	Resto				
0					10 000
1	4	4/10	3 200	3 200	6 800
2	3	3/10	2 400	5 600	4 400
3	2	2/10	1 600	7 200	2 800
4	1	1/10	800	8 000	2 000
10		10/10			

Depreciación aplicable en el tercer año de vida útil del activo

$$D_3 = [C - L] \left[\frac{n - h + 1}{\text{Suma de dígitos}} \right]$$

$$D_3 = [10\,000 - 2\,000] \left[\frac{4 - 3 + 1}{10} \right]$$

$$D_3 = 1\,600$$

9. Listado de fórmulas

Método de línea recta

$$D = \frac{C - L}{n} \quad (113) \text{ Depreciación}$$

$$F = \left[\frac{C - L}{n} \right] h \quad (114) \text{ Fondo de reserva después de } h \text{ años}$$

$$V = C - \left[\frac{C - L}{n} \right] h \quad (115) \text{ Valor contable después de } h \text{ años}$$

Método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros

$$V_h = C(1 - r)^h \quad (116) \text{ Valor contable}$$

$$r = 1 - \left(\frac{L}{C}\right)^{1/n} \quad (117) \text{ Tasa de depreciación}$$

$$D_h = rC[(1 - r)^h - 1] \quad (118) \text{ Depreciación transcurrido } h \text{ períodos}$$

$$F_h = C[1 - (1 - r)^h] \quad (119) \text{ Fondo de reserva transcurrido } h \text{ períodos}$$

$$F_h = C \left[1 - \left(\frac{L}{C}\right)^{h/n} \right] \quad (120) \text{ Fondo de reserva transcurrido } h \text{ períodos}$$

Método del doble saldo decreciente

$$V_h = \left[1 - \frac{2}{n} \right]^h [\text{Costo inicial}] \quad (121) \text{ Valor contable}$$

$$D_h = \frac{2}{n} \left[1 - \frac{2}{n} \right]^{h-1} [\text{costo inicial}] \quad (122) \text{ Depreciación}$$

Método del fondo de amortización

$$D = (C - L)FDFA_{i;n} \quad (123) \text{ Depreciación}$$

Método del interés sobre la inversión

$$D = [C(1 + i)^n - L]FDFA_{i;n} \quad (124) \text{ Depreciación}$$

Método de unidades producidas

$$D = \left[\frac{C - L}{\text{Prod. total}} \right] \text{prod. anual} \quad (125) \text{ Depreciación}$$

Método de suma de números dígitos

$$D = C - L \left[\frac{\text{años que le restan al activo}}{\text{suma de dígitos}} \right] \quad (126) \quad \text{Depreciación}$$

10. Problemas propuestos

Método uniforme o de línea recta

1. Aplicando el método uniforme o de línea recta, prepare el cuadro de depreciación de un activo fijo cuyo costo inicial fue de \$ 4 000 con una vida probable de 5 años y un valor residual de \$ 500.
2. Calcule el importe acumulado en el fondo de reserva para depreciación después de 10 meses de adquirida una máquina, cuyo costo fue de \$ 5 000 la cual tiene una vida estimada de 7 años y un valor de salvamento de \$ 1 000. Aplique el método uniforme o de línea recta. Rp. F = \$ 476,19.
3. ¿Cuál será el valor contable de una máquina con una antigüedad de 4 años y 3 meses y una vida útil estimada de 8 años? Su precio fue de \$ 6 000 y se prevé un valor de salvamento de \$ 800. Aplique el método uniforme o de línea recta. Rp. V = \$ 3 237,50.

Método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros

4. Calcule el coeficiente de depreciación aplicando el método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros de un activo fijo adquirido en \$ 4 000 el cual tiene una vida estimada de 6 años y un valor de salvamento de \$ 1 000. Rp. $r = 0,206299474$.
5. Una máquina adquirida en \$ 3 000 tiene una vida probable de 5 años y un valor residual estimado en \$ 500. Prepare el cuadro de depreciación del activo aplicando el método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros. Rp. $r = 0,3011728812$.
6. Aplicando el método del porcentaje fijo del valor decreciente en libros. calcule el fondo de reserva para depreciación después de haber transcurrido 3 años 6 meses de haber adquirido una máquina en \$ 7 000. la cual tiene una vida útil estimada en 5 años y un valor de recuperación de \$ 800. Rp. $F_{3,5} = \$ 5 466,47$.

Método del fondo de amortización

7. Deduzca una fórmula para hallar el valor contable en cualquier momento, aplicando el método del fondo de amortización.
Rp. $V_h = C - D \cdot FCS_{i,n}$.
8. Aplicando el método del fondo de amortización calcule el importe del cargo anual por depreciación de un activo adquirido en \$ 4 500 el mismo que tiene una vida estimada de 5 años y un valor de salvamento de \$ 700. El fondo de amortización produce una TEM del 0,75%. Rp. $D = \$ 630,15$.
9. Aplicando el método del fondo de amortización, calcule el valor contable al finalizar el quinto año de un activo adquirido en \$ 8 000, el mismo que tiene una vida útil de 6 años y un valor de salvamento estimado en \$ 1 000. El fondo produce una TEM del 1%. Rp. $V_5 = \$ 2 540,27$.
10. Aplicando el método del fondo de amortización, prepare el cuadro de depreciación de una máquina adquirida en \$ 7 000, la cual tiene una vida estimada de 6 años y un valor de recuperación de \$ 600. El fondo produce una TEA del 15%.

Método del interés sobre la inversión

11. La compañía Refrigeración S.A. compró cinco congeladoras a \$ 3 000 cada una. Las congeladoras tienen una vida estimada de 5 años y un valor de salvamento de \$ 300 cada una. ¿Qué importe debe ponerse en un fondo de depreciación para que además produzca una TEA del 12% sobre la inversión? $D = \$ 3 925,03$.

Método de unidades producidas

12. Una camioneta Combi adquirida en \$ 20 000 tiene una vida útil estimada de 900 000 km de recorrido en zona urbana y un valor de recuperación de \$ 3 000. Calcule su depreciación para los primeros tres años si se proyectan los siguientes kilometrajes de recorrido: primer año 400 000 km; segundo año 300 000 km; tercer año 150 000 km.

Método de suma de números dígitos

13. Aplicando el método de los números dígitos, elabore el cuadro de depreciación de un activo fijo cuyo precio de adquisición es de \$ 7 000, tiene una vida útil de 5 años y un valor residual de \$ 1 000.
14. La vida útil estimada de un edificio construido para galerías comerciales es de 40 años y su costo fue \$ 500 000. Asumiendo un valor residual nulo, calcule la depreciación según el método de la suma de números dígitos, correspondiente al primer, segundo, octavo y trigésimo año. Rp. \$ 24 390,24; \$ 23 780,49; \$ 20 121,95; \$ 6 707,32.

11. Resumen del capítulo

Depreciar es disminuir el valor de propiedad de un activo fijo por el transcurso del tiempo, desgaste, uso, obsolescencia u otros factores de carácter operativo, tecnológico o tributario. Los elementos que se toman en cuenta para depreciar un activo son: costo inicial, vida útil, valor contable, valor comercial, valor de recuperación y valor de uso. Vale decir que no todos los activos siempre se deprecian. Una excepción puede constituirlos los terrenos, los cuales incluso pueden revaluarse.

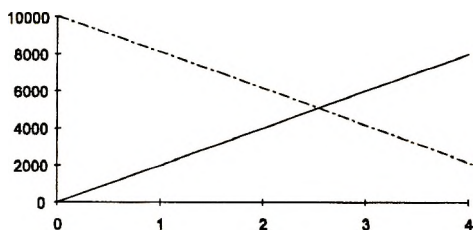
El agotamiento de un activo se produce cuando el activo se extingue, consume o desaparece progresivamente debido a la utilización de sus recursos aprovechables.

Existen diferentes métodos de depreciar activos siendo los más comunes los siguientes: uniforme o de línea recta, porcentaje del valor decreciente en libros, doble saldo decreciente, fondo de amortización, interés sobre la inversión, unidades producidas y suma de números dígitos.

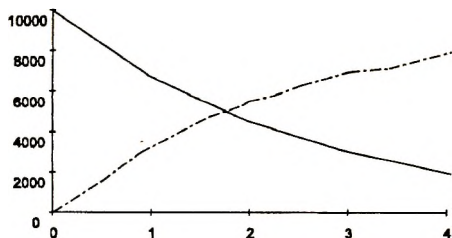
Algunos gráficos del fondo de reserva y valor contable, correspondientes a los métodos de depreciación tratados, se muestran a continuación.

Línea recta

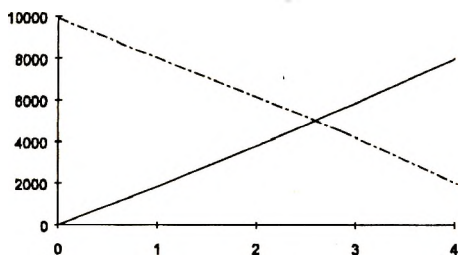
n	Depre- ciación	Fondo de reserva	Valor contable
0			10 000
1	2 000	2 000	8 000
2	2 000	4 000	6 000
3	2 000	6 000	4 000
4	2 000	8 000	2 000

**Porcentaje fijo**

n	Depre- ciación	Fondo de reserva	Valor contable
0			10 000,00
1	3 312,60	3 312,60	6 687,40
2	2 215,27	5 527,86	4 472,14
3	1 481,44	7 009,30	2 290,70
4	990,70	8 000,00	2 000,00

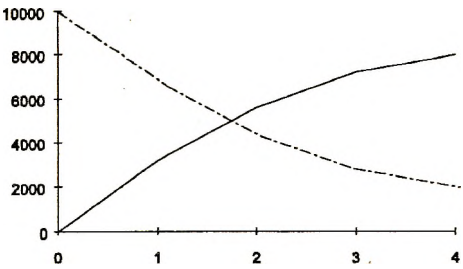
**Fondo de amortización**

n	Depre- ciación	Fondo de reserva	Valor contable
0			10 000,00
1	1 856,09	1 856,09	8 143,91
2	1 856,09	3 804,99	6 195,01
3	1 856,09	5 851,34	4 148,66
4	1 856,09	8 000,00	2 000,00



Suma de números dígitos

n	Depre- ciación	Fondo de reserva	Valor contable
0			10 000
1	3 200	3 200	6 800
2	2 400	5 600	4 400
3	1 600	7 200	2 800
4	800	8 000	2 000



Casos

Caso 1: Me adelanto al vencimiento

Miguel Pérez dueño de una carpintería de madera obtuvo el 27 de marzo un préstamo de S/. 5 000 para cancelarlo al vencimiento de 180 días pagando una tasa anual de interés simple del 36%. Por este financiamiento Miguel había hipotecado su terreno, motivo por el cual decidió ir guardando periódicamente una cierta cantidad de dinero producto de la ganancia líquida del taller, con el objeto de cumplir puntualmente con la obligación contraída. El 15 de abril, fecha en que dispuso S/. 1 500 hizo el primer pago. El 13 de mayo efectuó un segundo pago de S/. 2 500. Después de efectuar este último pago, Miguel pensó: "ahora sí, debo sólo S/. 1 000 más los intereses y tengo plazo para pagar este importe hasta el 24 de agosto, es decir más de 3 meses, gracias a Dios el negocio ha rendido lo suficiente, creo que inclusive podré cancelar el préstamo a fines de julio, de este modo me convertiré en un buen cliente y podré pedir un nuevo crédito por S/. 8 000". Efectivamente el 31 de julio, Miguel sacó de su caja chica S/. 1 500 y se dirigió a cancelar su deuda. Cancelada su deuda y camino a su casa Miguel pasó por un banco en cuya ventana había pegado un aviso que decía "pagamos por sus ahorros una tasa anual del 24% con capitalización mensual", asimismo, recordó que la primera vez que vio ese letrero fue precisamente la fecha en que obtuvo el préstamo.

Preguntas

1. ¿Qué monto debió pagar Miguel al final del plazo original del crédito?
2. Formule la liquidación final del crédito al 31 de julio, considerando los pagos parciales que efectuó Miguel.
3. Presente un informe financiero y demuestre si Miguel efectuó una buena operación, de lo contrario efectúe la recomendación de lo que debería haber realizado.

Caso 2: Inversiones diversificadas

Miguel Martínez estudiante del sexto ciclo de economía y aficionado a las finanzas, trabaja actualmente en el Área de Operaciones de un conocido banco local. Durante sus tres años de labor, Miguel ha logrado reunir un capital que en la fecha asciende a S/. 20 000 y el cual está colocado en una cuenta de ahorros por el que percibe una tasa nominal anual del 18% capitalizable mensualmente.

El 20 de junio Miguel decidió cancelar su libreta de ahorros y colocar el íntegro de sus ahorros (S/. 20 000) en operaciones que ofrecían mayor rentabilidad, pero también representaban mayor riesgo. Con el objeto de diversificar el riesgo colocó parte de su capital en la Bolsa de Valores y parte en la banca informal realizando las siguientes operaciones:

En la Bolsa de Valores

El 20 de junio ordenó a su agente la compra de acciones "A" por un importe de S/. 12 000. La operación se llevó a cabo el 22 de junio. El 15 de julio las acciones "A" habían rentabilizado 2,8% y debido a "informes" de que esta acción caería, ordenó la venta de sus acciones y con dicho capital invertir en las acciones "B". La venta se realizó el mismo día 15 y la compra de las nuevas acciones se efectuó el 18 de julio. El 18 de agosto a primera hora del día Miguel ordenó la venta de las acciones "B". En esta fecha las acciones "B" habían acumulado una tasa de rentabilidad de 3,3% desde el momento de su compra. Por cada orden de compra y de venta Miguel pagó a su agente S/. 200.

En la banca informal

El mismo 20 de junio Miguel colocó el saldo de su capital ascendente a S/. 8 000, donde un inversionista privado que ofrecía las siguientes tasas efectivas quincenales: primera quincena 2,0%; segunda quincena 2,2%; tercera quincena 2,5%; cuarta quincena 2,8%. El capital y los intereses capitalizados podían ser retirados en cualquier momento después de haber transcurrido un mes. El 18 de agosto Miguel canceló esta operación.

Preguntas

1. ¿Cuánto rentabilizó en la bolsa? Rp. - 0,68%.
2. ¿Qué interés ganó en todo el periodo en la banca informal? Rp. S/. 674,84.
3. ¿Cuál fue la tasa acumulada de todo el período? ¿Cuál fue la tasa efectiva mensual en la banca informal? Rp. 8,435% en 53 días; 4,69% mensual.
4. De haber mantenido su depósito en ahorros ¿qué interés y qué tasa habría acumulado del 20 de junio al 18 de agosto?

Caso 3: El cliente paga todo lo que dispone

Miguel Gonzales, Gerente de Operaciones del Banco del Centro, se encontraba revisando la cartera de documentos descontados vencidos del último trimestre, notando que en promedio la cartera se incrementaba 8% mensual. Preocupado por estos reportes llamó al señor Luis Delgado, Jefe del Dpto. de Descuentos y Cobranzas para que le explicara los motivos de la demora en las recuperaciones de los descuentos otorgados. El señor Delgado le manifestó al Gerente de Operaciones que la causa fundamental era la última orden de gerencia que estableció, que cualquier pago parcial efectuado por los clientes, debería cubrir, además de los intereses vencidos, el 50% del valor nominal del documento vencido. Insistió que en muchas oportunidades los pagos parciales efectuados por los clientes eran rechazados en el Dpto. de Caja porque no llegaban a cubrir dicho porcentaje, lo que originaba que la deuda siguiera incrementándose debido a los intereses generados por la deuda vencida.

El señor Delgado mostró al Gerente de Operaciones un ejemplo práctico de lo que sucedía, presentándole las siguientes liquidaciones:

Descuento		
Prestatario	:	Alcázar H. Miguel
Título-Valor	:	Pagaré 16528
Fecha actual	:	11/07
Fecha de Vcto.	:	10/08
Plazo del Dscto.	:	30 días
TEM	:	3%
Importe del documento	S/.	50 000,00
Descuento a 30 días (0,02912621359)		(1 456,31)
Portes		(10,00)
Abono neto en cta. cte.		48 553,69

Descuento vencido		
Prestatario	:	Alcázar H. Miguel
Título-Valor	:	Pagaré 16528
Fecha actual	:	25/08
Fecha del Dscto.	:	11/07
Fecha de Vcto.	:	10/08
Plazo del Dscto.	:	30 días
Días en mora	:	15 días
TEM	:	3%
TEM de mora	:	0,45%
Importe del documento	S/.	50 000,00
Nuevo doc. con vcto el		?
Amortización 50%		?
Int. compensatorio 0,014889157		744,46
Int. moratorio 0,002247474		112,37
Int. sobre el nuevo doc.		?
Portes		10,00
Protesto		30,00
Total		50 896,83

Terminó diciendo que el señor Alcázar en la fecha dispone de S/. 20 000 para aplicar S/. 896,83 a los intereses vencidos, portes y gastos de protesto y los S/.19 103,17 restantes redistribuirlos: una parte en la amortización y la diferencia en los intereses anticipados del nuevo documento a descontar. En suma, hoy 25/08 el señor Alcázar desea aplicar los S/. 20 000 para disminuir su deuda vencida el 10/08. Operación que estamos impedidos a efectuar.

El Gerente de Operaciones le manifestó al Jefe del Dpto. de Descuentos y Cobranzas que en coordinación con el Jefe del Dpto. de Finanzas prepare un proyecto de orden de gerencia que autorice a los clientes a amortizar su deuda vencida con el importe que en la fecha tengan disponible.

Se pide

1. Desarrolle una fórmula para aplicar el íntegro del importe parcial disponible por el cliente para amortizar su deuda vencida.
2. Aplicando la fórmula desarrollada en 1) efectúe la liquidación para la operación del señor Alcázar distribuyendo íntegramente los S/. 20 000 entre:
 - los intereses vencidos y gastos,
 - el importe del nuevo documento a descontar por un nuevo período de 30 días a la misma TEM del 3%.
 - el importe de la amortización.
3. Prepare el proyecto de la orden de gerencia solicitado por el Gerente de Operaciones, que incluya el procedimiento a aplicar.

Caso 4: Crédito pignoraticio

Edgardo Garrido pasando por una céntrica calle de Lima recibió de una persona un volante promocionando un sistema de **préstamos inmediatos**. Sintiendo curiosidad de como funcionarían estos préstamos, puso atención al tenor de la propaganda que a la letra decía:

¡Nadie te presta más rápido que nosotros!

"Crédito Pignoraticio es un muy antiguo pero actual sistema de préstamo de **dinero inmediato** a cambio de dejar en garantía un objeto de valor (prenda). Se le conoce popularmente como "empeño" y también como "Crédito Prendario".

La prenda entregada en garantía del préstamo permanece en poder de quien otorga el crédito y es devuelta al prestatario al momento de la cancelación de la deuda más los intereses pactados. El satisfacer alguna apremiante necesidad económica en forma inmediata y el hacer producir el capital invertido en una prenda, es pues el beneficio que brinda el sistema del CRÉDITO PIGNORATICIO. Es importante que entre quien otorga y quien recibe el

crédito exista una relación de absoluta confianza que garantice que al pago total de la deuda la prenda se devuelva en perfectas condiciones.

La Caja de Crédito brinda a la colectividad la posibilidad de acceder a este práctico, seguro y rápido sistema de crédito.

La Caja de Crédito acepta como **garantía** de préstamos inmediatos alhajas de oro, las que son tasadas inmejorablemente, con los más bajos intereses y con absoluta garantía de devolución.

La caja de Crédito otorga todas las facilidades para el pago del préstamo. Acepta amortizaciones mensuales de parte de la deuda e incluso si por alguna razón esto no es posible basta con cancelar los intereses mensuales (renovaciones).

Edgardo dijo: "este aviso me cae como anillo al dedo, el lunes llevaré mi cadena, la esclava de oro de mi esposa y los aros de matrimonio y pediré una platita para devolverla dentro de 15 días; con ese dinero compraré mercadería y con las ganancias podré pagar el crédito o renovarlo por 15 días mas".

Efectivamente, en esa fecha se acercó al Departamentos de Informes y allí recibió la siguiente información: "señor Garrido, el crédito que puede solicitar equivale al 50% del valor de tasación de sus joyas. Sobre el préstamo a que tendría derecho le cobramos una TEM del 5%. Además por la custodia de su prenda le cobramos una TEM del 2,5% aplicable al valor de tasación de sus joyas. Tanto la tasa sobre el préstamo como la tasa sobre la custodia de valores se calculan anticipadamente y la diferencia es el préstamo neto a que tiene derecho. Si por algún motivo usted no cancelase el crédito a su vencimiento se le cobrará adicionalmente una TEM de mora de 2% y si el retraso es superior a los 10 días, entonces se le cobrará además un Derecho de Remate equivalente al 1% de la Remuneración Mínima Vital vigente, importe que en la fecha es de S/. 3,00. Ahora usted puede pasar al Dpto. de Créditos".

Un poco confundido con toda la información recibida, Edgardo sólo pensaba en el importe que la entidad financiera le abonaría por las joyas que había traído. En el Dpto. de Créditos le informaron que sus prendas habían sido tasadas en S/. 2 000 y que, por lo tanto, tendría derecho a un préstamo bruto de S/. 1 000 al cual se le deduciría el interés adelantado y la custodia de valores.

A estas alturas Edgardo estaba más confundido que antes. Él necesitaba disponer de un importe líquido de S/. 1 200 para lo cual podría aumentar las garantías, por lo que formuló la siguiente pregunta a la señorita encargada: "¿si necesito que ustedes me abonen un importe neto de S/. 1 200 después que hayan deducido todas las tasas que me han informado ¿a cuánto debería ascender como mínimo el importe de la garantía que debería a entregar a ustedes? Después de varias consultas y algunos minutos de espera recibió la siguiente respuesta: "disculpe señor, pero ese programa todavía no esta instalado en nuestro computador central: sin embargo, sí le podemos dar la información del neto que usted recibiría con los S/. 2 000 en que hemos tasado sus joyas".

Preguntas

1. Con sus prendas avaluadas en S/. 2 000 ¿cuánto le abonarían a Edgardo?
2. Si Edgardo después de recibido el préstamo anterior se retrasa 18 días en cancelar su deuda, ¿a cuánto ascendería el pago total y como estaría compuesto?
3. Para disponer S/. 1 200 ¿a cuánto tendría que ascender el importe de las garantías? Deduzca una fórmula que se pueda aplicar para estos casos.

Caso 5: Renovación con amortización

Víctor Alcalá, dueño de la empresa Textiles Internacionales, haciendo uso de su línea de Descuentos con el banco Exsur, descontó un pagaré con valor nominal de S/. 80 000 recibiendo la siguiente boleta de liquidación:

Descuento		
Prestatario	:	Alcalá H. Víctor
Título-Valor	:	Pagaré 26028
Fecha actual	:	24/09
Fecha de Vcto:	:	08/11
Plazo	:	45 días
TEM	:	6%
Importe del documento	S/.	80 000,00
Descuento a 45 días (0,083692583)		(6 695,41)
Portes		(10,00)
Abono neto en cta. cte.		73 294,59

Un desembolso extraordinario para reparar desperfectos en sus máquinas textiles le impidió pagar oportunamente su deuda bancaria. El 23 de noviembre, Víctor se comunicó con su sectorista y le solicitó renovar el pagaré por 45 días más. El sectorista le manifestó: "Las renovaciones proceden sólo después que el cliente haya cancelado el interés compensatorio y el interés moratorio (cuya tasa es del 15% de la TEM), generado por la deuda vencida; los gastos de protesto de S/. 30; los portes de S/. 10. Además, debe efectuarse una amortización mínima del 30% sobre el importe del documento original. En este caso el descuento del nuevo pagaré sobre el saldo de la deuda original se efectuará aplicando una TEM del 7%. Si usted está de acuerdo, esta operación puede quedar concluida en este momento".

Preguntas

1. ¿Cuánto debe pagar Víctor para renovar el pagaré?
2. ¿Cuál es la TEM de la operación original considerando todos los pagos que debe efectuar Víctor?
3. Asuma que Víctor cancela a su vencimiento el pagaré renovado. ¿Cuál fue el costo efectivo promedio mensual de toda la operación?

Caso 6: Fondos colectivos

Walter Calleja había recurrido a varias instituciones financieras con el objeto de solicitar un préstamo de \$18 000. Capital necesario para iniciar un negocio de distribución de cerveza cuya tasa de rentabilidad neta estimaba en 10% mensual. Sin embargo su solicitud había sido denegada por falta de garantías que respaldasen dicho crédito, a pesar de que su sueldo como funcionario de una empresa de exportaciones le permitía cubrir ampliamente la cuota mensual de \$ 847,32 que los bancos le cobraban durante un período de 24 meses.

Al no encontrar respuesta positiva para llevar a cabo su proyecto, decidió asociarse al Sistema de Fondos Colectivos "Promesa", cuyas condiciones ofertadas eran las siguientes:

- | | | |
|------------------------|---|---------------|
| - Número de asociados | : | 150 personas. |
| - Importe del fondo | : | \$ 20 000 |
| - Cuota de inscripción | : | \$ 1 180 |

- Numero de cuotas mensuales : 50
- Importe de las cuotas anticipadas : \$ 466,08
- Opciones de adjudicación : Una por sorteo y otra por remate.
- Condiciones del remate : Se pueden ofertar en sobre cerrado hasta 8 cuotas que se aplican a cancelar las ultimas cuotas del fondo. Si se produjese empate entre las ofertas entonces se dilucidara por sorteo.

Walter había tomado esta decisión motivado por un amigo suyo, quien obtuvo el fondo en el segundo sorteo y porque además disponía del importe necesario para ofertar las cuotas máximas desde el primer remate. Confiaba en su buena suerte y en la posibilidad de que los otros asociados no oferten en los remates el número máximo de cuotas para adjudicarse el fondo.

El 29 de enero Walter pago su inscripción y la primera cuota para participar en el primer sorteo que se llevaría a cabo al día siguiente.

Preguntas

1. Asumiendo que Walter no oferta en ningún sorteo y se adjudica el fondo en la cuota número 50, calcule la TEA de este financiamiento.
2. Si Walter se adjudica el fondo por sorteo en la primera cuota compare el costo de este financiamiento con el costo del financiamiento bancario que no pudo obtener.
3. Calcule el costo del financiamiento si Walter se adjudicó el fondo por remate el 30 de junio.
4. Asuma que todos los pagos realizados al fondo se han efectuado con recursos tomados en préstamo a una TEM del 3%, para ser devueltos en dos cuotas constantes con vencimiento cada una en 30 y 60 días después de la adjudicación del fondo. Calcule el importe de cada cuota y el costo total del financiamiento recibido por el sistema de fondos colectivos.

Caso 7: Canastas de navidad

La gerencia financiera del Banco Nacional, empresa con mas de 2 000 trabajadores que residen en los diferentes distritos de Lima Metropolitana, ha seleccionado como proveedor de su programa Canasta de Navidad a la empresa Escala Super Gigante. El sistema consiste en el otorgamiento al personal del Banco Nacional, vales de consumo por un importe previamente determinado, que sirven como dinero en efectivo para adquirir cualquier producto en la cadena de tiendas del proveedor, aprovechando inclusive los descuentos que dicha empresa ofrece en sus promociones de venta. Los vales atendidos por Escala serían facturados al Banco Nacional por su equivalente monetario.

Escala Super Gigante ha enviado al Banco la siguiente propuesta de financiamiento:

Lima, 15 de noviembre de 1 99X

Srs.

Banco Nacional

Presente

Ref. Canasta de Navidad

Ampliando los términos de referencia de nuestra propuesta técnica según carta 288-23 y de acuerdo con su solicitud, presentamos a ustedes las siguientes alternativas de financiamiento del Concurso 023 cuya buena pro ha sido otorgada a nuestra empresa.

Alternativa	A	B	C
Pago inicial	30%	30%	--
A 30 días	70%	30%	40%
A 60 días	--	40%	60%

Los pagos a 30 días están exentos de interés, los pagos a 60 días generarán una TEM del 5% sobre los saldos.

Atentamente,

Considerando que el banco no tiene problemas de liquidez, ¿qué opción recomendaría usted? Fundamente su respuesta.

Caso 8: Reconstrucción de préstamo

El 3 de marzo el Banco del Oeste aprobó un crédito a la empresa Cometsa por un importe de \$ 20 000 para ser reembolsado en 5 cuotas de amortización fijas, pagaderas cada una cada 30 días. El préstamo devengará una TEM del 2%. El desembolso total del crédito se produjo en tres armadas de acuerdo al siguiente cronograma:

Fecha	Importe
Marzo, 3	10 000
Marzo, 10	8 000
Abril, 5	2 000

Durante la vigencia del préstamo, la tasa compensatoria y la tasa moratoria ha sufrido las siguientes variaciones:

Fecha	Días		TEM	
	Parcial	Acumulado	Compensatoria	Moratoria
Marzo, 3	90	90	2,0%	0,4%
Junio, 1	61	136	1,8%	0,36%
Agosto, 1	35	186	1,5%	0,3%
Setiembre, 5				

Durante la vigencia del préstamo, Cometsa ha efectuado los siguientes pagos:

Abril, 8	3 800
Mayo, 15	4 500
Junio, 1	4 000
Agosto, 2	3 600

El 5 de setiembre el Gerente de Cometsa se apersona al Banco del Oeste y solicita a su sectorista el estado de la cuenta a esa fecha, con el objeto de

cancelar el préstamo. El sectorista le responde: usted lo que necesita es una reconstrucción de su préstamo, es decir un estado de la cuenta desde su primer desembolso hasta la fecha, que incluya cuota por cuota los intereses compensatorios y moratorios vencidos.

Preguntas

1. Prepare la reconstrucción del préstamo y establezca el importe total a pagar el 5 de setiembre por Cometsa.
2. Realice nuevamente toda la operación pero considerando cuotas constantes vencidas.
3. Calcule el VAN y TIR de los resultados hallados en 1 y 2.

Siglas

Capítulo I Nociones fundamentales

Progresión aritmética

a_1	Primer término de una progresión aritmética.
a_2	Segundo término de una progresión aritmética.
a_n	n-ésimo término.
d	Diferencia común.
PA	Progresión aritmética.
S_n	Suma de términos.

Progresión geométrica

a_1	Primer término de una progresión geométrica.
a_2	Segundo término de una progresión geométrica.
a_n	Enésimo término.
PG	Progresión geométrica.
r	Razón común.
S_n	Suma de términos.

Interpolación lineal

x	Valor con el que una función lineal interpoladora de la original es igual a y .
x_1	Valor del dominio de la función correspondiente al primer nodo de interpolación. Abscisa del primer nodo de interpolación.
x_2	Valor del dominio de la función correspondiente al segundo nodo de interpolación. Abscisa del segundo nodo de interpolación.
y	Valor de la función original correspondiente al dato buscado.
y_1	Valor de la función lineal correspondiente a x_1 . Ordenada del primer nodo de interpolación.
y_2	Valor de la función lineal correspondiente a x_2 . Ordenada del segundo nodo de interpolación.

Capítulo II Interés simple

i	Valor de la tasa de interés durante n periodos.
I	Interés simple.
$i_1, i_2, i_3 \dots$	Valores variables que asume la tasa de interés.
n	Períodos de tiempo de vigencia de i .
$n_1, n_2, n_3 \dots$	Períodos de tiempo de vigencia de las tasas i_1, i_2, i_3, \dots respectivamente.
P	Principal, capital o stock inicial de efectivo, valor presente.
S	Monto, capital o stock final de efectivo, valor futuro.

Capítulo III Interés compuesto

f	Frecuencia de capitalización: número de días del período capitalizable.
FSA	Factor simple de actualización $(1 + i)^{-n}$.
FSC	Factor simple de capitalización $(1 + i)^n$.
H	Número de días del horizonte de la operación.
$H_1, H_2, H_3 \dots$	Número de días de cada cuota que sumados dan H .
i	Valor constante que asume la tasa de interés del período capitalizable (tasa efectiva).
I	Interés compuesto.

i_1, i_2, i_3, \dots	Valores variables que asume la tasa de interés del periodo capitalizable.
I_k	Interés devengado en cualquier periodo capitalizable k .
m	Número de periodos de capitalización en el año de la TNA.
n	Número de periodos capitalizables en el horizonte temporal.
n_1, n_2, n_3, \dots	Número de periodos capitalizables transcurridos durante la vigencia de la tasa i_1, i_2, i_3, \dots respectivamente.
P	Principal, capital o stock inicial de efectivo, valor presente.
S	Monto, capital o stock final de efectivo, valor futuro.

Capítulo IV Descuento

Racional simple y compuesto

D	Descuento.
i	<i>En descuento simple:</i> tasa de interés por período de tiempo. <i>En descuento compuesto:</i> tasa de interés del periodo capitalizable.
n	<i>En descuento simple:</i> Número de periodos de tiempo que faltan para el vencimiento. <i>En descuento compuesto:</i> número de periodos capitalizables que faltan para el vencimiento.
P	Valor presente de un título-valor.
S	Valor nominal de un título-valor que corresponde a su valor futuro.

Bancario simple y compuesto

D	Descuento.
d	<i>En descuento bancario simple:</i> tasa de descuento por periodo de tiempo. <i>En descuento bancario compuesto:</i> tasa de descuento por período capitalizable.
n	<i>En descuento bancario simple:</i> número de periodos de tiempo que faltan para el vencimiento. <i>En descuento bancario compuesto:</i> número de periodos capitalizables que faltan para el vencimiento.
P	Valor líquido de un título-valor.
S	Valor nominal de un título-valor que corresponde a su valor futuro.

Descuento comercial

Dc	Descuento comercial.
d	Tasa de descuento expresada en tanto por uno.
PR	Precio rebajado.
PV	Precio de venta.

Capítulo V Tasas

C_n	Cantidad en el momento n.
C_o	Cantidad en el momento 0.
f	Número de días del período de tiempo correspondiente a la tasa equivalente buscada.
f	Tasa de inflación.
H	Número de días correspondiente al período de tiempo de la tasa efectiva i proporcionada como dato.
i	Tasa efectiva. Tasa efectiva ajustada por inflación. Tasa equivalente.
i'	Tasa efectiva obtenida a partir de una tasa nominal.
ic	Tasa de interés compuesto.
ic	Tasa de interés compensatorio.
im	Tasa de interés moratorio.
In	Índice.
IPC	Índice de Precios al Consumidor.
IPC_n	IPC en el momento n.
IPC_o	IPC en el momento 0.
is	Tasa de interés simple.
ITM	Interés total en mora.
j	Tasa nominal.
$j_{(m)}$	Tasa nominal capitalizable m veces en el año.
m	Número de períodos de capitalización en el año de la TNA.
r	Tasa real.
T	Tasa.
TAMEX	Tasa activa en moneda extranjera.
TAMN	Tasa activa moneda nacional.
TIPMEX	Tasa de interés pasiva en moneda extranjera.
TIPMN	Tasa de interés pasiva en moneda nacional.

Capítulos VI VII y VIII ~~Anualidades vencidas~~ anticipadas y diferidas

f	Número de días del periodo capitalizable.
FAS	Factor de actualización de la serie uniforme.
FCS	Factor de capitalización de la serie uniforme.
FDFA	Factor de depósito al fondo de amortización.
FRC	Factor de recuperación del capital.
H	Número de días del plazo de la anualidad a interés compuesto.
H_1, H_2, H_3, \dots	Subperíodos de tiempo en que se divide H.
i	Valor constante que asume la tasa de interés del periodo capitalizable (tasa efectiva).
i_1, i_2, i_3, \dots	Valores variables que asume la tasa de interés del periodo capitalizable correspondientes a H_1, H_2, H_3, \dots respectivamente.
k	Números de periodos capitalizables diferidos.
$k + n$	Total de periodos capitalizables en una anualidad diferida.
m	Número de periodos de capitalización en un año de la TNA.
n	Número de periodos capitalizables no diferidos en la anualidad.
P	Valor presente de una anualidad.
R	Renta vencida.
Ra	Renta anticipada o imposición.
S	Monto de una anualidad.

Capítulo IX Rentas ~~perpetuas~~

k	Número de rentas necesarios para obtener un monto W en una renta perpetua simple vencida.
P	Valor presente de una perpetuidad.
R	Renta de una perpetuidad simple.
Ra	Renta de una perpetuidad en el momento 0, cuyas otras rentas conforman una perpetuidad simple.
W	Monto de los k pagos de importe R efectuados al final de cada periodo de capitalización en una anualidad simple.

Capítulos VI VII y VIII Anualidades vencidas, anticipadas y diferidas

f	Número de días del período capitalizable.
FAS	Factor de actualización de la serie uniforme.
FCS	Factor de capitalización de la serie uniforme.
FDFA	Factor de depósito al fondo de amortización.
FRC	Factor de recuperación del capital.
H	Número de días del plazo de la anualidad a interés compuesto.
H_1, H_2, H_3, \dots	Subperíodos de tiempo en que se divide H.
i	Valor constante que asume la tasa de interés del período capitalizable (tasa efectiva).
i_1, i_2, i_3, \dots	Valores variables que asume la tasa de interés del período capitalizable correspondientes a H_1, H_2, H_3, \dots respectivamente.
k	Números de períodos capitalizables diferidos.
$k + n$	Total de períodos capitalizables en una anualidad diferida.
m	Número de períodos de capitalización en un año de la TNA.
n	Número de períodos capitalizables no diferidos en la anualidad.
P	Valor presente de una anualidad.
R	Renta vencida.
Ra	Renta anticipada o imposición.
S	Monto de una anualidad.

Capítulo IX Rentas perpetuas

k	Número de rentas necesarios para obtener un monto W en una renta perpetua simple vencida.
P	Valor presente de una perpetuidad.
R	Renta de una perpetuidad simple.
Ra	Renta de una perpetuidad en el momento 0, cuyas otras rentas conforman una perpetuidad simple.
W	Monto de los k pagos de importe R efectuados al final de cada período de capitalización en una anualidad simple.

Costo capitalizado

C	Costo capitalizado de un activo.
F	Costo original o inicial de un activo.
W	Costo de reemplazo de un activo.

Costos equivalentes

C	Costo capitalizado del activo principal y alternativo.
F	Costo original y de reemplazo del activo principal.
F'	Costo original y de reemplazo del activo alternativo.
i	Tasa de interés por período.
k	Años de vida útil del activo.

Capítulo X Anualidades generales

FDFA	Factor de distribución.
FCS	Factor de agrupamiento.

Capítulo XII Gradientes

FASG	FAS de una anualidad de los gradientes.
FRCG	FRC de una anualidad de los gradientes.
G	Valor del gradiente uniforme.
g	Razón de crecimiento geomérico.
P	Valor presente.

Capítulo XIII Fondos de amortización

R_h	Última renta en el momento h para acumular un fondo de amortización S .
-------	---

Capítulo XIV Amortización

A_k	Cuota capital de la k -ésima cuota constante.
D_k	Deuda residual en el período k . Cuotas constantes.
E_k	Deuda extinguida en el período k . Cuotas constantes.

g	Razón de crecimiento.
G	Gradiente constante o variación de las rentas cada cierto número de cuotas.
I_k	Cuota interés de la k -ésima cuota constante.
r	Último pago en el momento n . Cuotas constantes.
r'	Último pago en el momento h . Cuotas constantes.
R'	Último pago en el momento $h - 1$. Cuotas constantes.

Capítulo XV Depreciación

C	Costo inicial.
D	Depreciación.
F	Fondo de reserva.
F_h	Fondo de reserva en el período h .
L	Valor de salvamento, deshecho o recuperación.
n	Vida útil.
r	Tasa de depreciación.
V	Valor contable en libros.
V_h	Valor contable en libros en el período h .
W	Valor de uso.

Bibliografía

Aliaga Valdez, Carlos, *Cálculo financiero - operaciones activas*. Lima: Edita. 1991.

Arméstar, Narciso y Luis Guerra, *Ingeniería económica*. Lima: Códice Ediciones, 1990.

Ayres, Frank, *Matemáticas financieras*. México: Mc Graw-Hill, 1982.

Blank, Leland y Antony Tarquín, *Ingeniería económica*. México: Mc Graw-Hill, 1986.

Cissell, Robert y Helen Cissell., *Matemáticas financieras*. México: CECSA. 1981.

Dávila Atencio, Fernando, *Matemática financiera*. Lima: Editorial Imprensa Sudamérica S.A.

Espinoza, Abdías, *Manual del analista financiero*, Lima. Texto mimeografiado.

Garayar, P. Gregorio, *Matemática financiera*. Lima: Editorial Universo. 1967

Gil Peláez, Lorenzo, *Matemática de las operaciones financieras*. Madrid: Editorial AC, 1989.

Mesías Lévano, Jorge, *Manual de matemáticas financiera*. Lima: Cessa, 1982.

Moore, Justin H, *Manual de matemáticas financieras*. México: UTEHA, 1981.

Murioni, Oscar y Angel A. Trossero, *Cálculo financiero*. Buenos Aires: Tesis Librería Editorial S.A., 1986.

Portus Govinden, Lynconyan, *Matemáticas financieras*. México: Mc Graw-Hill, 1985.

Taylor, George A., *Ingeniería económica*. México: Editorial Limusa-Wiley S.A., 1972.

Vallo Andrade, Victorio, *Matemáticas financiera*. Lima: ISCECA.

Gonzales Catalá, Vicente, *Enfoque práctico de las operaciones de la matemática financiera*. Barcelona: Montaner y Simón, S.A. Editores, 1982.

APUNTES DE ESTUDIO

1. Portocarrero Suárez, Felipe. *Como hacer un trabajo de investigación*. 3a. ed., Lima: CIUP, 1990.
2. Miyashiro Miyashiro, Isabel. *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*. Tomo II. 3a. ed. Lima: CIUP, 1991.
3. Miyashiro Miyashiro, Isabel. *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*. Tomo III. 3a. ed. Lima: CIUP, 1991.
4. Injoque Espinoza, Javier. *WordPerfect 5.1. Fundamentos y orientaciones prácticas*, 2a. ed., Lima: CIUP, 1992.
5. Miyashiro Miyashiro, Isabel. *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*. Tomo III. Lima: CIUP, 1991.
6. Gatti Murriel, Carlos y Jorge Wiese Rebagliati, *Elementos de gramática española*, 2a. ed., Lima: Universidad del Pacífico, 1993.
7. Gatti Murriel, Carlos y Jorge Wiese Rebagliati, *Técnicas de lectura y redacción. Lenguaje científico y académico*, Lima: Universidad del Pacífico, 1992.
8. Mayorga, David y Patricia Araujo. *Casos de política de la empresa*. Lima: CIUP, 1992.
9. Miyashiro Miyashiro, Isabel (Comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, Tomo IV, Lima: CIUP, 1992.
10. Pipoli de Butrón, Gina. (Comp.), *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*. Lima: CIUP, 1992.
11. Miyashiro Miyashiro, Isabel (Comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, Tomo V, Lima: CIUP, 1993.
12. Rivero, Eduardo. *Contabilidad I*. Lima: CIUP, 1993.

13. Altamirano, Jesús, *Lotus 2.4. Conceptos y consejos prácticos*, Lima: Universidad del Pacífico, 1993.
14. Schwalb, María Matilde y Carlos Herrera, *Colección de casos de mercadotecnia*, Lima: CIUP, 1993.
15. Chong, Esteban y otros, *Teoría y práctica de la contabilidad intermedia*. Lima: CIUP, 1994.
16. Wong, David, *Finanzas en el Perú: un enfoque de liquidez, rentabilidad y riesgo*, 2a. ed., Lima: CIUP, 1995.
17. Mayorga, David y Patricia Araujo, *La importancia de la mercadotecnia estratégica: el caso de la empresa peruana*, Lima: CIUP, 1994.
18. Aliaga Valdez, Carlos, *Manual de matemática financiera: texto, problemas y casos*, Lima: Universidad del Pacífico, 1994.
19. Angeles, Julio; Jorge Rubio; Yván Soto y Jorge Toma, *Procesamiento estadístico de datos con Minitab y Harvard Graphics*, Lima: Universidad del Pacífico, 1995.
20. Schwalb, María Matilde y Herrera, Carlos, *Casos peruanos de mercadotecnia*, Lima: CIUP, 1995.